Théorie Mathématique Platoniste-Théorie Aléatoire des Nombres (v3)

Par Thierry DELORT
(Octobre 2022)

This book, THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE-THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES(v3), written in French, exposes 2 fundamental theories in Mathematics.

The 1st theory, THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE (Platonist Mathematical Theory), is a Platonist interpretation of the whole of mathematics. It shows that all mathematics can be interpreted in a new way, every mathematical theory, every theorem, every proof can be interpreted by the Platonist Mathematical Theory. Consistance of classical mathematical theories can also be obtained using the Platonist Mathematical Theory.

The 2nd, THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES (Conjecture de Goldbach) (Random Theory of Number, Goldbach's Conjecture) is the 1st theory of random in number theory. This theory permits to obtain a theoretical justification of Weak and Strong Goldbach's Conjectures, and also of the Conjecture of the Twin Primes by Hardy and Littlewood.

Note au lecteur :

Ce livre, Théorie mathématique Platoniste-Théorie Aléatoire des Nombres, est aussi inclus dans le livre « Théories d'or 10e édition », auteur Thierry DELORT, publié aux éditions Books on Demand, Paris.

A 𝔐. de N.

Remerciements :

Je remercie tous ceux qui m’ont aidé, par leur aide logistique ou morale, ou par leurs conseils, en particulier :

Ma chère mère Marie-Claude Delort, pour son soutien indéfectible et constant, Pr E. Panarella, Editeur Physics Essays, mon frère Jean-Yves Delort, Docteur Paris VI (Jussieu), pour toute l’aide logistique qu’il m’a apportée, mes chers grands-parents Simone et Alfred Bonnamy, Pr M. Duffy, qui m’a invité à la conférence PIRT 2004 (Londres), mon père Francis Delort †2008(ECP61).

Je remercie également mes professeurs , notamment J.D Bloch (Math-sup Louis le Grand,math), Mr Réverchon(Math-Spé Louis le Grand,physique), Mr Vaquez (Terminale, Lycée Robespierre, Arras, physique), MMrs Bonifet, Le Sann, Jouve (1^{ière}, 2nde, Lycée Stanislas, Montréal, Math, Math, Physique), Mr Paul Deheuvels (Proviseur Lycée Louis le Grand (1981)), Mme Duval (5ième 3ième, Collège Emile Verarhren, Saint-Cloud (Math)),Mr Grimm (Ancien directeur ECP (1987)), Mr Martin, (directeur des études ECP 2ième année(1987)).

Je remercie aussi mon frère Jacques Delort (X83),Mr Charles-Michel Marle (X53), mon ami Arnaud Sergent (HEC86), Benjamin Enriquez (X83), ma sœur Sophie Delort et mon oncle Jean-Marc Bonnamy (X54) pour les coups de main qu’ils m’ont donnés.

Théorie mathématique Platoniste-Théorie Aléatoire des Nombres (version 2)

A.THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

B.THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.
(Conjecture de Goldbach)

TABLE DES MATIERES

I. PRESENTATION DE L'OUVRAGE.

Après avoir lu un livre sur les mathématiques prêté par un ami, Arnaud S., j'ai essayé de résoudre la célèbre Conjecture de Goldbach, « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers ». De plus, j'ai aussi travaillé aussi sur une nouvelle approche des fondations des mathématiques et de la logique, dont la conception actuelle reposant sur le formalisme me semblait restreinte et insatisfaisante.

Dans ce livre, je présente donc 2 théories qui sont le fruit de nombreuses années de recherches, plus ou moins continues.

Même si les 2 théories que je présente sont révolutionnaires sous bien des aspects, je n'ai pu les élaborer qu'en utilisant les travaux de chercheurs, connus ou inconnus qui m'ont précédé. J'ai aussi utilisé des livres scientifiques très intéressants, indiqués dans les Références de mes articles. J'ai aussi bénéficié de l'enseignement excellent de certains professeurs lors de mes études primaires et secondaires, et du soutien moral et logistique de nombreux membres de ma famille proche, et des aides de diverses natures d'autres personnes, dans la rédaction de ce livre (Voir Remerciements).

Dans la partie II. suivante, je rappellerai le contexte historique scientifique dans lequel chaque théorie a été obtenue.

II)PRESENTATION DE CHACUNE DES THEORIES

A.La Théorie mathématique Platoniste.

Le plus important mathématicien de l'antiquité fut, à mon avis, le mathématicien Grec Euclide (vers-300). Le premier, il eut l'idée d'exprimer une théorie sous la forme d'Axiomes et de Théorèmes, les seconds étant déduits logiquement des premiers. Cette théorie était géométrique et étudiait différentes figures dans un Plan Euclidien, elle est pour cela connue sous le nom de géométrie Euclidienne. Plus tard, notamment avec l'invention des chiffres classiques par des mathématiciens Indiens, la Théorie des nombres se développa elle aussi, et à partir de la Renaissance, les mathématiques se développèrent dans leur ensemble, et connurent un essor extraordinaire. Le mathématicien français Descartes (1596-1650) introduisit les *coordonnées cartésiennes*, et on découvrit qu'on pouvait interpréter toute la géométrie Euclidienne en utilisant les coordonnées cartésiennes. Puis de nouveaux concepts mathématiques fondamentaux apparurent, notamment le concept d'*ensemble*.

La plupart des mathématiciens avaient l'idée d'une certaine signification réelle des mathématiques, et il était facile de se représenter un Plan Euclidien, ou un système de 2 axes gradués dans un plan définissant des cordonnées cartésiennes. Cependant, avec l'apparition du concept d'ensemble, apparurent certains problèmes qui rendaient de plus en plus difficile de donner une signification réelle aux mathématiques. Ainsi, dans la 1^{ière} Théorie des ensembles, si on considérait des ensembles existant, on obtenait un ensemble ayant ces ensembles pour éléments, mais un mathématicien Allemand, Cantor (1845-1918) montra qu'il était impossible qu'un ensemble contienne tous les ensembles. Un mathématicien Anglais, Russel (1872-1970) montra aussi, et c'est assez facile de le vérifier, qu'il est impossible qu'un ensemble contienne tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Ces impossibilités sont connues sous le nom de Paradoxe de Cantor et Paradoxe de Russel, et elles conduisirent à abandonner la 1^{ière} théorie des ensembles avec laquelle on obtenait ces paradoxes appelée *Théorie naïve des ensembles*.

De plus les mathématiques devenaient de plus en plus compliqués, et il devenait de plus en plus difficile de se représenter comme ayant une signification réelle les concepts introduits par les mathématiciens. En particulier, grâce aux travaux du mathématicien Français Cauchy (1789-1857), on identifia les droites à des ensembles, et en particulier on identifia chaque droite d'un repère Cartésien, c'est-à-dire d'un système de 2 axes définissant des coordonnées cartésiennes à un ensemble **R**, contenant des nombres appelés réels. Un repère Cartésien était alors identifié à un ensemble produit de **R** par lui-même. Cependant, cet ensemble **R** est plus difficile à se représenter qu'une droite dans un plan Euclidien ou un plan muni d'un repère cartésien. Mais de nouveaux concepts mathématiques beaucoup plus complexes que **R** apparaissaient aussi.

Cependant, la question du Platonisme d'un point de vue philosophique, c'est-à-dire la question de savoir si les mathématiques avaient ou non une existence réelle, n'était pas abandonnée. Mais ceci relevait strictement du domaine philosophique car aucune théorie mathématique des fondations des mathématiques ne pouvait être considérée comme une théorie Platoniste. Ainsi, les Axiomes des théories mathématiques n'étaient pas interprétés, et les théories mathématiques modélisant la logique mathématique étaient des théories dites de *logique formelle*. D'après ces théories, les propositions mathématiques étaient considérées comme des suites de symboles, qu'on pouvait déduire les unes des autres par des règles automatiques. La déduction en mathématique était modélisée dans les théories de logique formelle par ce qui est appelé des *systèmes formels*, définis par des Axiomes et des règles automatiques de déduction, permettant d'obtenir des propositions à partir des Axiomes.

On admettait dans les théories de logique formelle 2 Principes fondamentaux concernant les propositions en mathématique, qui étaient les suivants avec quelques variantes possibles :
-Toute proposition est vraie ou n'est pas vraie (Principe du Tiers Exclu)
-Aucune proposition est vraie et fausse (Principe de Non contradiction).

C'est dans le cadre des théories de logique formelle qu'on étudiait la *consistance* des théories mathématiques, c'est-à-dire de savoir si on pouvait déduire une proposition et sa négation à partir des Axiomes d'une théorie donnée, et qu'on étudiait la *complétude* d'une théorie, c'est-à-dire s'il existait une proposition vraie qu'on ne pouvait pas déduire d'une théorie donnée. En particulier, on s'est aperçu que certaines théories, malgré des Axiomes contradictoires étaient consistantes. C'était par exemple le cas pour la théorie de la géométrie proposée par le mathématicien Riemann et la Théorie de la géométrie Euclidienne. Un problème se posait donc : Les 2 théories étant apparemment consistantes, comment savoir laquelle est vraie ?
Le mathématicien Américain Godel (1906-1978) résolut le problème de la complétude en montrant qu'aucune théorie représentée par un système formel (c'est-à-dire donc le modèle représentant les théorie mathématiques dans les théories de logique formelle) n'était complète. Il existait toujours une proposition vraie qu'on ne pouvait obtenir par le système formel. Pour montrer ceci, Godel considéra la proposition :
P :P n'est pas démontrable (dans le système formel considéré).
Et on comprend intuitivement que tout en étant vraie, cette proposition ne peut pas être démontrée par le système formel considéré.
A l'heure actuelle, la question philosophique du Platonisme n'est pas résolue: Certains philosophes croient en l'idée du *Platonisme* définie plus haut d'autres pensent que, comme on les représente dans les théories mathématiques de logique formelle, les mathématiques ne sont que des déductions automatiques dépourvues de sens. On appelle *formalisme* cette 2ième position philosophique concernant les mathématiques. L'une et l'autre position sont défendues par divers arguments philosophiques.

Or la Théorie mathématique Platoniste exposée dans ce livre permet de prouver mathématiquement l'existence réelle de tous les concepts mathématiques classiques, d'expliciter la signification réelle de toutes les propositions utilisées par les mathématiques classiques, et en conséquence la signification réelle de toute démonstration utilisée dans les théories de mathématique classique. Cette Théorie mathématique Platoniste n'est pas de nature philosophique, mais est de nature mathématique. En effet, elle est totalement analogue à la première grande théorie mathématique, ayant servi de modèle à toutes les théories mathématiques qui suivirent, c'est-à-dire la théorie d'Euclide :
On sait qu'Euclide admettait l'existence d'un espace contenant les figures géométriques qu'il étudiait (droites, triangles, cercles..).De plus, comme on l'a rappelé plus haut, il déduisait logiquement des théorèmes de certains Axiomes, méthode reprise par l'ensemble des mathématiciens qui suivirent.
De façon analogue, la Théorie mathématique Platoniste est basée sur des Axiomes dont on déduit des théorèmes. Le premier Axiome admet l'existence d'un Espace (appelé *Espace Mathématique Platonique*) contenant tous les objets mathématiques de la même façon qu'Euclide admettait l'existence d'un plan contenant toutes les figures qui existaient d'après ses Axiomes. Les autres Axiomes de la TMP (Théorie Mathématique Platoniste) sont eux aussi de formulation simple et se comprennent intuitivement comme c'était le cas pour les Axiomes de la Théorie Euclidienne. Ils permettent l'obtention de théorèmes exprimant l'existence des objets mathématiques correspondant aux concepts des fondations des mathématiques, ceci de la même façon que d'après les Axiomes d'Euclide on obtenait l'existence de certaines figures géométriques à partir d'autres figures. Tous les

Lemmes et Théorèmes de la TMP sont obtenus par déduction logique des Axiomes de la TMP. En particulier, on obtient dans le 1^{ier} article (Introduction à la logique Platonicienne-Théorie des ensembles) des Lemmes ou des Théorèmes exprimant l'existence d'objets pouvant être identifiés à l'ensemble des réels **R** qu'on a évoqué plus haut, et aussi l'existence d'objets mathématiques ayant les propriétés de concepts mathématiques classiques comme les espaces vectoriels ou les corps. Les méthodes introduites dans ce premier article peuvent être généralisées pour prouver l'existence d'objets mathématiques ayant les propriétés de très nombreux concepts utilisés en mathématique classique. La TMP, fondée sur des Axiomes de la même façon que toute théorie mathématique, apparaît comme étant consistante, et on expose dans le 1^{ier} article comment elle évite les Paradoxes de Cantor et de Russel évoqués plus haut. La particularité de la TMP est que ses Axiomes ont une signification réelle. Mais on déduit de ces Axiomes des théorèmes de la même façon qu'on déduit des théorèmes des Axiomes de n'importe quelle théorie mathématique.

Il est à noter que dans le 1^{ier} article exposant la TMP, on introduit un concept qui est fondamental dans la TMP qui est celui d'un *concept non-flou*. Tel qu'on l'a défini dans la TMP, un concept non-flou est un symbole S tel que tout objet mathématique existant ou bien peut être représenté par S ou bien ne peut pas être représenté par S et que de plus on n'a aucun objet mathématique qui à la fois peut être représenté par S et ne peut pas être représenté par S. Dans le 1^{ier} article on donne un Axiome simple (Axiome 2.5) permettant de justifier qu'un symbole est un concept non-flou. Cet Axiome se comprend intuitivement, mais l'origine complète de sa validité sera exposée dans le 2nd article (Logique Platonicienne des Propositions), où l'on verra que cet Axiome est la conséquence d'autres Axiomes beaucoup plus simples de la TMP. On verra aussi dans ce 2nd article qu'il est donc toujours possible d'utiliser ces nouveaux Axiomes à la place de cet Axiome très utilisé dans le 1^{ier} article.

Dans le 2ième article on introduit donc de nouveaux axiomes très simples, et on déduit de ces axiomes :

-Un théorème analogue au Principe du Tiers Exclu (énoncé plus haut).

-Un théorème analogue au Principe de Non contradiction (énoncé plus haut).

Ainsi, ce qui n'était dans la logique formelle que des Principes sans justification devient des théorèmes déduits des Axiomes de la TMP, dont la démonstration dans la TMP permet de comprendre complètement l'origine de la validité. On résout aussi dans le TMP le problème de la consistance : On montre que toute *théorie mathématique Platoniste* est consistante. (On définira dans la TMP une *théorie mathématique Platoniste*, la TMP en étant un exemple). La TMP définit complètement comment on peut, pour toute proposition d'une Théorie mathématique Platoniste, expliciter sa signification réelle, c'est-à-dire sa signification dans l'espace mathématique Platoniste introduit dans le 1^{ier} Axiome de la TMP, et aussi les critères permettant de déterminer si cette proposition est vraie ,fausse, ou ni vraie ni fausse. Toutes ce définitions et ces théorèmes sont donc déduits des Axiomes de la TMP.

La TMP apparaît donc comme la théorie mathématique la plus générale, car c'est la théorie s'appliquant à toutes les théories mathématiques : Non seulement elle permet d'obtenir et de justifier l'existence de tous les concepts des fondations des mathématiques, mais aussi la signification réelle de toutes les théories mathématiques classiques et l'existence de tous les concepts mathématiques classiques. Elle permet aussi de justifier la consistance de toutes les théories mathématiques classiques, en interprétant la logique inhérente à toute théorie mathématique classique. On a vu en particulier que les théorèmes fondamentaux qu'elle permet d'obtenir, correspondant au Principe de Non contradiction et au Principe du Tiers Exclu ne peuvent être obtenus dans aucune autre théorie mathématique. De plus, interprétant les fondations des mathématiques, elle peut être utilisée comme base de toute théorie mathématique classique.

Comme on l'a remarqué, la seule différence entre les Axiomes de la TMP et les Axiomes d'une autre théorie mathématique classique consiste en ce que les Axiomes de la TMP ont une signification réelle. La TMP utilise des concepts primitifs, c'est-à-dire sans définition explicite dont on utilise les propriétés intuitives, qui sont principalement les mêmes ou analogues à ceux utilisés dans les théories mathématiques classiques. Ainsi, on a vu que le concept primitif Espace mathématique Platonique dans la TMP était analogue au concept primitif de Plan Euclidien dans la Théorie

d'Euclide. La TMP utilise les concepts primitifs « est élément de », « existe » qui sont utilisés dans toutes les théories mathématiques classiques. Le concept primitif « représente » est utilisé dans la TMP de la même façon qu'il est utilisé implicitement dans les théories mathématiques classiques, avec cependant la remarque que dans les théories classiques, on ne l'utilise que pour définir des concepts non-flous (définis plus haut), alors que dans la TMP, il peut exister des concepts flous. Cependant, la TMP met en évidence que c'est parce qu'elles n'utilisent que des concepts non-flous que les théories mathématiques classiques peuvent être considérées comme des théories mathématiques Platoniste, ce qui est à l'origine de leur consistance. Dans les déductions d'Axiomes de la TMP, on utilise les mêmes propriétés intuitives des concepts primitifs que celles utilisées dans n'importe quelle théorie mathématique classique. Par exemple, concernant le concept primitif « est élément de » on utilise dans la TMP comme dans toute théorie mathématique classique qu'il est impossible que le naturel 2 soit élément et ne soit pas élément d'un ensemble. Concernant le concept primitif « existe », la TMP peut utiliser comme toute théorie mathématique qu'il est impossible qu'un élément d'un ensemble donné existe et n'existe pas. La TMP introduit aussi le concept primitif d' « objet mathématique », mais n'utilise que les propriétés évidentes de ce concept primitif.

La TMP résout le problème évoqué plus haut concernant la géométrie Riemannienne et la géométrie Euclidienne: On peut établir utilisant la TMP que les Axiomes des 2 théories expriment les propriétés d'objets existants et que les 2 théories sont des théories mathématiques Platonistes. Il en résulte qu'elles sont consistantes, et les Axiomes de l'une et de l'autre théorie sont vrais, mais ils n'expriment pas les propriétés des mêmes objets mathématiques.

On voit donc que la TMP permet de prouver classiquement et rigoureusement à partir de ses Axiomes l'existence de tous les concepts mathématiques classiques. On pourrait cependant répondre qu'on n'est pas sûr de la validité des Axiomes de la TMP. Or quelle que soit la Théorie mathématique, on sait que par définition on ne démontre jamais ses Axiomes, quelque soit leur simplicité (Sinon, ce ne sont plus des Axiomes mais des théorèmes).

Cependant, ce qui illustre la validité de la TMP et de ses Axiomes, c'est le remarquable accord entre ses prédictions théoriques et ce qu'on vérifie en analysant les théories mathématiques classiques : Ainsi, par exemple la TMP définit complètement une proposition ayant une signification Platoniste ainsi que cette signification Platoniste, et on observe que cela s'applique à toutes les propositions des théories mathématiques classiques, dont on peut obtenir une signification Platoniste totalement en accord avec la définition de la TMP. De plus toutes les démonstrations utilisées dans les théories classiques, peuvent exactement se mettre sous la forme des démonstrations des théories mathématiques Platonistes définies dans la TMP. Les théorèmes de la TMP correspondant aux Principes du Tiers Exclu et au Principe de Non-contradiction, démontrés pour des théories mathématiques Platonistes, se vérifient pour toutes les théories mathématiques classiques, dont on vérifie aussi la consistance, démontrée pour les théories mathématiques Platonistes. De plus, il est bon de rappeler que la TMP permet de démontrer théoriquement l'existence de tous les concepts mathématiques des fondations des mathématiques, tout en apparaissant comme consistante ; elle permet notamment d'éviter les Paradoxes de Cantor et de Russel. Et donc, c'est ce remarquable accord entre les prédictions de la TMP et ce qu'on observe en analysant les théories mathématiques classiques qui illustre la validité de la TMP et de ses Axiomes, dont on sait que par définition des axiomes d'une théorie mathématique, on ne pourra jamais démontrer la validité (sauf à partir d'autres Axiomes dont on admet aussi la validité). On verra que la TMP a des applications importantes dans la compréhension de la physique et de toute science utilisant un cadre mathématique.

En conclusion la TMP permet d'apporter une réponse claire à la question Philosophique du Platonisme, en permettant de justifier théoriquement l'existence de tout concept mathématique classique.

B. La Théorie Aléatoire des Nombres .

J'ai appris par un ami (Arnaud Sergent) l'énoncé de la Conjecture de Goldbach : « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers », et que celle-ci n'avait jamais été démontrée. Cette Conjecture a été proposée au 18ième siècle par un mathématicien Allemand, Goldbach (1690-1764), et depuis lors de

nombreux mathématiciens ont tenté sans succès de la démontrer. On l'appelle aussi *Conjecture faible de Goldbach*, pour la différencier de la *Conjecture forte de Goldbach* suivante :

Deux mathématiciens Anglais, Hardy et Littlewood, sans démontrer la Conjecture faible de Goldbach précédente, ont proposé une autre Conjecture beaucoup plus complète et complexe, qui est la suivante : « Si r(k) est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k, alors :

$$r(k) \approx 2C_2 \prod_{p/k,p\geq 3} \frac{p-1}{p-2}(\frac{k}{(Log(k))^2}) \qquad (6)$$

Avec :

$$C_2 = \prod_{i=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(p_i-1)^2}) \cong 0,66 \qquad (7)$$

Dans les expressions précédentes, p et p_i sont des nombres premiers supérieurs ou égaux à 3.
Il est évident que cette 2ième Conjecture, appelée Conjecture forte de Goldbach ou Conjecture *étendue* de Goldbach entraîne la Conjecture faible de Goldbach (pour des nombres pairs assez grands) , mais il semble évident qu'elle est beaucoup plus difficile à démontrer en supposant qu'on puisse les démontrer toutes les 2.

Cherchant à démontrer la Conjecture faible de Goldbach, j'eus un jour l'idée, prenant k=10000, de considérer l'ensemble A(10000) des paires de nombres premiers inférieurs à 10000, et l'ensemble B(10000) des paires {i,10000-i}, i étant un nombre impair inférieur à 5000. J'ai calculé alors la probabilité que A(10000) et B(10000) n'ait aucun élément en commun, ce qui est facile en utilisant la théorie des probabilités, et j'ai trouvé que cette probabilité était supérieure à $1\text{-}10^{-50}$, c'est-à-dire un zéro suivi de 50 chiffres 9 après la virgule (L'obtention de cette probabilité est exposé dans le 1^{ier} article « Théorie Aléatoire des Nombres. Partie I : Conjecture de Goldbach » exposé dans ce livre). Ceci fut comme un flash pour moi : La Conjecture faible de Goldbach ne serait-elle pas dû aux probabilités ?.

J'ai travaillé ensuite de nombreuses années, en essayant de développer cette idée : Comment obtenir certaines propositions faisant partie de la Théorie des Nombres par la Théorie des probabilités ?, et j'ai pu ainsi élaborer la Théorie Aléatoire des Nombres :

Le Principe de cette théorie est que le hasard, ou plus exactement les lois du hasard, sont à l'origine de la validité de certaines propositions en Théorie des Nombres. Cependant, les lois du hasard dans les nombres ne peuvent s'exprimer de la même façon que les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres, et de plus elles ne peuvent pas être démontrées en utilisant la Théorie des Nombres classique. Or il semble certain, tout comme on l'a vu précédemment avec la Conjecture faible de Goldbach, que certaines propositions vraies en Théorie des Nombres sont uniquement dues aux lois du hasard dans les nombres, et dans ce cas, on ne trouvera jamais une démonstration de ces propositions utilisant seulement la Théorie des nombres classiques pour la simple raison qu'une telle démonstration n'existe pas. L'existence de telles propositions est impossible à prouver en utilisant la Théorie des nombres classiques, car pour cela, il faudrait d'abord démontrer que ces propositions sont vraies en utilisant la Théorie des nombres classiques, ce qui est impossible par hypothèse. Mais d'un point de vue de pure logique, il n'y a aucune raison pour que de telles propositions vraies, qui soient dues uniquement aux lois du hasard dans les nombres, n'existent pas.

J'ai donc découvert qu'il était nécessaire, pour exprimer les lois du hasard en Théorie des nombres, d'introduire une nouvelle logique appelée *logique aléatoire*. Cette logique est basée sur des propositions appelées *pseudo-Axiomes aléatoires*, qui sont analogues aux Axiomes classiques, c'est-à-dire qu'ils ont un caractère d'évidence. Ce sont ces pseudo-Axiomes aléatoires qui permettent d'obtenir des modèles statistiques concernant des nombres, ainsi que des propositions classiques apparaissant comme des conséquences des lois du hasard en Théorie des nombres. Cependant, la différence fondamentale avec les Axiomes classiques est que, malgré leur caractère d'évidence, les modèles statistiques qu'ils permettent d'obtenir ne sont pas toujours valides.

Si une proposition classique est obtenue par cette logique aléatoire, elle est définie dans la Théorie Aléatoire des Nombres (T.A.N) que j'ai exposée plus loin comme ayant une *explication aléatoire*, c'est-à-dire donc une justification théorique basée sur les lois du hasard dans les nombres. Une telle explication aléatoire d'une proposition classique n'est intéressante que si on ne connaît pas de démonstration classique à cette proposition (ni à sa négation), une démonstration classique étant définie comme une démonstration utilisant seulement la Théorie des nombres classique, et pour que cette explication aléatoire soit intéressante, il est aussi préférable que certains tests illustrent sa validité. En effet la Théorie Aléatoire des Nombres n'est intéressante que pour donner des justifications théoriques à des propositions qui ont les lois du hasard pour unique origine, ce qui n'est pas le cas si elles ont une démonstration classique. C'est donc seulement pour des propositions qui n'ont jamais été démontrées classiquement (ni leur négation) et qui de plus sont illustrées par des tests qu'il est intéressant de trouver une explication aléatoire en utilisant la T.A.N.

Or c'est exactement le cas de la Conjecture faible de Goldbach, qui n'a jamais été démontrée classiquement malgré 2 siècles de tentatives infructueuses par de nombreux mathématiciens, et qui est pourtant illustrée par de nombreux tests : On a vérifié sa validité pour des nombres très élevés à l'aide d'ordinateurs. Ainsi, dans le 1^{ier} article, je montre que la Conjecture faible de Goldbach a une explication aléatoire (C'est-à-dire on l'a vu une justification théorique basée sur les lois du hasard dans les nombres), extrêmement simple, utilisant les pseudo-Axiomes aléatoires introduits dans ce 1^{ier} article. Dans le 2nd article, je développe la T.A.N , et je montre qu'elle peut s'appliquer, c'est-à-dire qu'elle permet de trouver une explication aléatoire, à de nombreuses propositions très simples concernant les décimales de certains irrationnels, ces propositions n'ayant jamais été démontrées classiquement (ni leur négation) et étant illustrées par de nombreux tests. Là encore, ces explications aléatoires sont très simples.

Je montre aussi dans le 2nd article que la T.A.N permet d'obtenir une justification aléatoire pour la Conjecture étendue de Goldbach, semblable à celle proposée par Hardy et Littlewood qu'on a rappelée au début de cette section. Cette explication aléatoire est, comme il fallait s'y attendre, nettement plus compliquée que celle de la Conjecture faible de Goldbach exposée dans le 1^{ier} article. Elle utilise notamment l'algèbre modulaire, mais je démontre dans ce 2ième article l'intégralité des théorèmes d'algèbre modulaire utilisés pour obtenir l'explication aléatoire de la Conjecture étendue de Goldbach. En réalité, la proposition finale dont j'obtiens une explication aléatoire diffère de celle proposée par Hardy et Littlewood d'un facteur 2, et donc je l'appellerai dans ce qui suit *variante de la Conjecture étendue de Goldbach*. L'explication aléatoire présentée de la variante de la Conjecture étendue de Goldbach apparaît donc comme un très grand succès de la T.A.N, d'une part parce que cette variante est d'une expression complexe et n'a jamais été démontrée classiquement, mais aussi parce qu'elle est obtenue en utilisant seulement des pseudo-Axiomes aléatoires très simples exposés dans la T.A.N. On remarque qu'il existe des tests illustrant la validité de la variante de la Conjecture étendue de Goldbach : En effet, on a réalisé par ordinateur des graphes représentant les couples (k,r(k)), avec k naturel pair et r(k) le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k. On obtient que ce graphe a l'aspect d'une comète et est appelé pour cela Comète de Goldbach. Dans le 2nd article, je montre que ce graphe illustre de façon remarquable la variante de la Conjecture étendue de Goldbach dont j'ai donné une explication aléatoire : En effet la variante de la Conjecture étendue de Goldbach donne l'équation des bandes observées sur la Comète de Goldbach, ainsi que les proportions et les répartitions de points (k,r(k)) sur ces bandes.

Enfin, je montre aussi que la T.A.N permet aussi d'obtenir une explication aléatoire pour une Conjecture très célèbre appelée Conjecture des nombres premiers jumeaux. Comme la Conjecture de Goldbach, elle n'a jamais été démontrée classiquement et existe sous une forme faible ou forte : On appelle couple de nombres premiers jumeaux un couple de naturels (i,i+2), telle que i et i+2 sont premiers. La Conjecture faible des nombres premiers jumeaux est : « Il existe une infinité de couples de nombres premiers jumeaux ». Elle n'a donc jamais été démontrée classiquement. Si on utilise la T.A.N, on peut montrer facilement qu'elle a une explication aléatoire mais celle-ci est moins intéressante que celle de la Conjecture faible de Goldbach car contrairement à celle-ci, il n'y a pas de tests qui permettraient de l'illustrer. Cependant, Hardy et Littlewood ont proposé la Conjecture forte des nombres premiers jumeaux qui est la suivante :
« Si g(k) est le nombre de couples de nombres premiers jumeaux (i, i+2), avec i inférieur à k, alors :

$$g(k) \approx 2C_2 \frac{k}{(Log(k))^2} \qquad (8)$$

avec toujours :

$$C_2 = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{(p_i - 1)^2}) \cong 0,66 \qquad (9)$$

On a montré dans le $2^{\text{ième}}$ article de la T.A.N que cette Conjecture forte des nombres premiers jumeaux avait elle aussi une explication aléatoire, celle-ci est donc également très intéressante puisqu'on n'a jamais montré classiquement ne serait-ce que la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux. De plus utilisant un ordinateur, il est possible de voir si elle est illustrée par des tests ou non. Les 2 conditions sont donc réunies pour que cette explication aléatoire soit intéressante.

D'après la T.A.N, on s'apperçoit que les lois du hasard semblent avoir une importance fondamentale en Théorie des nombres. Ces lois du hasard sont introduites par ce qu'on a appelé les pseudo-Axiomes aléatoires de la T.A.N. Ceux-ci permettent d'obtenir entièrement les modèles statistiques qui peuvent être à l'origine d'une proposition ayant une explication aléatoire. Et donc de ce fait cette explication aléatoire, justification théorique basée sur les lois du hasard, permet de comprendre que le hasard peut être à l'origine de la validité de la proposition, de la même façon que pour une justification théorique qui est une démonstration classique. De plus, elle permet de comprendre pourquoi cette proposition ayant une explication aléatoire n'a pas de démonstration classique : C'est le cas si son origine est uniquement basée sur les lois du hasard, puisqu'on a vu qu'on ne pouvait pas démonter les lois du hasard en utilisant la Théorie des nombres classiques. Il apparaît que la T.A.N permet de donner des justifications théoriques basées sur le hasard à de très nombreuses propositions, parmi lesquelles certaines sont considérées comme les plus intéressantes, et qui n'ont pas de justification théorique classique. Toutes ces explications aléatoires restent fondamentales tant qu'on n'a pas trouvé de démonstrations classiques à ces propositions, et on a vu qu'il est très possible qu'on n'en trouvera jamais pour la bonne raison qu'elles n'existent pas.

La T.A.N apparaît donc comme étant une branche nouvelle et fondamentale en Théorie des nombres.

Une idée largement admise est que Hardy et Littlewood ont trouvé la Conjecture forte de Goldbach (Equation (6)), en utilisant des probabilités. Ceci semble totalement erroné : Ils ont publié pour la $1^{\text{ière}}$ fois cette Conjecture dans un article de la revue Acta mathematicae de 1923, en utilisant la théorie des nombres classiques, sans utiliser nulle part des probabilités. En fait, je n'ai jamais trouvé d'article donnant une justification intuitive de la Conjecture forte de Goldbach basée sur des probabilités. Même si un tel article existe, en donnant une justification intuitive de cette Conjecture basée sur des probabilités, il est important de noter que la T.A.N permet avec son formalisme d'en donner une justification théorique, et non seulement une justification intuitive.

III.LES THEORIES

Dans ce qui suit, j'expose les 2 théories présentées dans la section précédente. La plupart des théorèmes ou des lois obtenus par d'autres théories et utilisés dans ces articles sont rappelés explicitement.

Les 2 théories exposées dans cet ouvrage sont indépendantes et donc chacune d'elle peut être lue isolément.

1ière THEORIE:

THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

Auteur :Thierry DELORT.
Date : Aout 2022.

1ier article : **THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE-THEORIE DES ENSEMBLES.**

2ième article :**LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS**.

TABLE DES MATIERES :

Article : THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE-THEORIE DES ENSEMBLES
Auteur :Thierry DELORT
Date :Aout 2020
Extrait du livre : Théories d'or 10e édition, Editions Books on Demand, Paris (2020)

RESUME :

Dans cet article, nous présentons une théorie mathématique générale basée sur le Platonisme, appelée TMP (Théorie Mathématique Platoniste), et en particulier la partie de la TMP relative aux fondations des mathématiques et à la Théorie des ensembles. Cette Théorie des ensembles Platoniste, nous conduit à obtenir l'existence au sens Platonicien des concepts de bases en mathématiques, notamment l'ensemble des naturels, l'ensemble de réels, et aussi l'existence d'objets mathématiques identifiés à des corps, des anneaux ou des espaces vectoriels. La TMP est donc fondamentale car elle permet de donner une signification Platoniste à l'ensemble des mathématiques, et donc propose une alternative aux théories mathématiques de logique actuelles basées sur le formalisme.

Nous voyons aussi comment apparaissent naturellement dans cette nouvelle théorie des ensembles Platoniste les paradoxes classiques (de Cantor ou de Russel) et nous exposons comment la TMP résoud ces paradoxes.

A partir des bases de la théorie présentée dans cet article, il est possible de la développer pour obtenir une Théorie Mathématique Platoniste de l'ensemble des mathématiques, et en particulier une Théorie de Logique Platonicienne des propositions, ce qui sera fait dans un second article.

Mots clés :Platonisme -théorie des ensembles- Paradoxes de Cantor et de Russel- fondations des mathématiques.

1.INTRODUCTION

La plupart des mathématiciens ont l'idée d'une existence réelle des mathématiques, mais jusqu'à présent cette conception, le *Platonisme*, était purement philosophique, les théories mathématiques de logique actuelle étant basées sur le formalisme. Le présent article présente une théorie mathématique, et non philosophique, donnant une conception Platoniste des mathématiques. C'est-à-dire qu'elle donne la signification, dans un *Espace Mathématique Platonique* (EMP), des concepts mathématiques classiques (Ensemble des naturels, des réels, espaces vectoriels…) et des théories mathématiques classiques.

Nous verrons que dans la TMP apparaissent naturellement les paradoxes classiques (de Cantor et de Russel) et comment ils sont résolus par la TMP.

Nous verrons qu'il y a une profonde analogie entre la TMP et la théorie géométrique d'Euclide, celle qui a inspiré Platon, notamment l'existence d'un espace dans lequel existe des objets mathématiques. Mais la TMP est beaucoup plus générale que la théorie d'Euclide, puisqu'elle peut interpréter l'ensemble des mathématiques modernes.

2.AXIOMES DE LA TMP

Le premier Axiome de la TMP est aussi le plus fondamental. Il définit les propriétés principales d'un Espace Mathématique Platonique (EMP) et celles des objets mathématiques.

L' Axiome de base de la TMP est donc :

AXIOME 2.1 :

a) « α est *un objet mathématique* » est équivalent à « α existe dans *l' Espace mathématique Platonique* (EMP) ».

b)Si α est un objet mathématique alors α est *un objet mathématique relationnel* ou (exclusif) *un objet mathématique non-relationnel* ou (exclusif) *un objet mathématique non-relationnel mixte*.

c)Il existe un et un seul objet mathématique non-relationnel α tel que α est l' Espace Mathématique Platonique.

Dans cet article, P1 et P2 étant 2 propositions quelconques, « P1 ou (exclusif) P2 » signifiera : «(P1 ou P2) et Non(P1 et P2) »

En accord avec leur sens intuitif, on verra plus loin que les ensembles et les couples sont par exemple des objets mathématiques non-relationnels, mais que « est élément de » est un objet mathématique relationnel.

Dans l'Axiome précédent « existe » n'est pas un terme propre à la TMP. C'est un concept primitif dont la première signification intuitive est celle qu'il a dans les propositions des théories mathématiques classiques de la forme « Il existe x élément de A » (A étant un ensemble).

Cependant « existe » a une 2ième signification dans la TMP. Ainsi « O_0 existe dans l'EMP » signifie que O_0 *existe dans une réalité abstraite* de la même façon que dans la théorie philosophique du Platonisme, les droites et les cercles *existent dans une réalité abstraite* identifiée avec le plan Euclidien. On verra que la TMP demeure valide même si « existe » a sa signification intuitive classique, mais les Axiomes et la TMP se comprennent avec sa signification dans la TMP.

On définit alors les concepts fondamentaux de la TMP :

AXIOME 2.2 :

a)Si C est *un couple*, alors il existe un et un seul A tel que A est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et il existe un et un seul B tel que B est objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP tels que A *est le premier terme de* C et B *est le deuxième terme de* C.

b)Si A est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP et B est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP, alors il existe un et un seul C tel que C est un couple et A est le premier terme de C et B est le deuxième terme de C.

Si C_0 est un couple et A_0 est le premier terme de C_0 et B_0 est le 2ième terme de C_0, on représentera classiquement C_0 par (A_0,B_0).

Une conséquence immédiate de l'Axiome 2.2 est que si C_{01} est un couple et C_{02} est un couple et si le premier terme de C_{01} est identique au 1^{ier} terme de C_{02} et le 2ième terme de C_{01} est identique au 2ième terme de C_{02} alors C_{01} est identique à C_{02}.

L'Axiome précédent est la définition Axiomatique d'un couple.

DEFINITION 2.2A :

Préambule : SEQUENCE FINIE

Par définition, une séquence finie à 2 termes sera un couple. Avant la définition des naturels dans la TMP, « 2 » sera considéré non comme un naturel mais simplement comme un symbole particulier.

Plus généralement, on montrera l'existence (dans l'EMP) d'un objet mathématique non-relationnel identifié avec l'ensemble des naturels **N**, chaque élément de **N** étant identifié avec un objet mathématique.

-Si $O_{10},..,O_{n0}$ sont des objets mathématiques différents de l'EMP (Avec n>2), on montrera aussi l'existence de $(O_{10},..,O_{n0})$, qui est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et qui sera identifié avec l'ensemble $\{(1,O_{10}),..,, (n,O_{n0})\}$ et qui sera appelée *séquence finie (à n termes)*.

-Réciproquement on dira qu'un objet mathématique O_0 est une *séquence finie* à n termes s'il existe $O_{10},..,O_{n0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP tel que $O_0=(O_{10},..,O_{n0})$.

Cependant, avant d'avoir montré l'existence de **N**, on utilisera seulement des séquences finies à 2 termes.

A)RELATION MIXTE

Par définition, « Un objet mathématique relationnel » aura la même signification qu' *une relation mixte* .

Par définition, si R est *une relation mixte*, pour tout objet mathématique O_0, $R(O_0\ )$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie.

-On emploiera la notation $R(O_0)$ pour « La relation mixte R interne de O_0 ».

-Si $(O_{01},\ldots O_{0n})$ est une séquence finie, on emploiera la notation « $R(O_{01},\ldots O_{0n})$ » pour « La relation mixte R entre les termes de la séquence finie $(O_{01},..,O_{0n})$ ».

B)RELATION NON FLOUE.

Une *relation non-floue* est un objet mathématique relationnel (et donc une relation mixte) R défini par les propositions suivantes :

a)Pour tout objet mathématique O_0, $R(O_0)$ est vraie ou n'est pas vraie. On dira que R est *binaire*.

b) Pour tout objet mathématique O_0, $R(O_0)$ n'est pas vraie et non-vraie, on dira que R est *cohérente.*

c)Si un objet mathématique O_0 est tel que $R(O_0)$ est vraie, alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP. On dira que R est un objet mathématique relationnel *restreint aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP*.

(On admettra Axiomatiquement que toute relation mixte est binaire et cohérente. On dira que toute relation mixte (et donc tout objet mathématique relationnel) est *non-flou*. R(o) étant un objet mathématique relationnel quelconque, on peut définir la *restriction de R(o) aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP* R'(o) : « R(o) et o est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP »)

d)Si il existe un naturel n, avec n>1, tel que pour tout objet O_0 tel que $R(O_0)$ est vraie, O_0 est une séquence finie de n termes (Ce qui entraine que tout terme de O0 est un objet mathématique non-relationnel), et que de plus il existe un objet mathématique non-relationnel O_0 tel que $R(O_0)$ est vraie, alors on dira que R a pour *ordres de multiplicité* 1 et n. On représentera alors R en utilisant la notation R(o) ou $R(o_1,..,o_n)$.

e)Si R est une relation non-floue, alors « 1 » sera *un ordre de multiplicité* de R qu'on pourra représenter avec la notation R(o).

f)Réciproquement, si R est un objet mathématique relationnel (c'est-à-dire une relation mixte) ayant les propriétés d'un relation non-floue exprimées par les points a),b),c) précédents, alors R est une relation non-floue.

g)On définit la relation non-floue « *relation impossible* » R_{IMP} telle que pour tout objet mathématique O_0, $R_{IMP}(O_0)$ n'est pas vraie. R_{IMP} aura par définition tout n naturel différent de 0 comme ordre de multiplicité.

D'après la définition précédente, toute relation non-floue aura au moins un ordre de multiplicité (« 1 »), et pourra avoir 1,2 ou une infinité d'ordres de multiplicité.

Dans ce premier article, on définira que des relations d'ordres de multiplicité 2 et 1. R étant une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2, on écrira en général O_{10} R O_{20} à la place de $R(O_{10},O_{20})$. Par exemple on écrira en accord avec la notation standard « a_0 est élément de A_0 » à la place de « est élément de(a_0,A_0) ».

AXIOME 2.2B :

a) « *est élément de* » est une relation non floue d'ordre de multiplicité 2. (ayant intuitivement le sens de « appartient à »

b)Si A est *un ensemble* et B est *un ensemble*, et si pour tout x tel que x est un objet mathématique « « x est élément de A » est équivalent à « x est élément de B » », alors A est identique à B.

c)Si A est un ensemble et a est élément de A, alors a est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP.

d)Si A est un ensemble, alors A est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP.

L'Axiome précédent est une définition axiomatique partielle d'un ensemble, et de la relation « est élément de ». Elle est partielle car d'autres Axiomes complèteront ces définitions.

AXIOME 2.2C :

a) « *est le premier terme de* » et « *est le* 2ième *terme de* » sont des relations non floues d'ordre de multiplicité 2.

b)Si x est tel que x est un couple, alors x n'est pas un ensemble et x est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP.

AXIOME 2.2D :

a)Il existe un et un seul objet mathématique σ tel que (σ est un ensemble et « Pour tout x tel que x est un objet mathématique non-relationnel, x n'est pas élément de σ »).

On dira que σ est *l'ensemble vide* et dans cet article, on le représentera toujours par le symbole σ.

b)Si A est un ensemble et A n'est pas identique à l'ensemble vide, alors il existe x tel que x est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP et x est élément de A.

L'Axiome précédent est la définition Axiomatique de l'ensemble vide et le b) est une définition axiomatique partielle (complétant les précédentes) d'un ensemble.

REMARQUE 2.2.E :

a)Des propositions vraies peuvent *entraîner* des propositions et à cause de la signification du concept primitif « entraîner », celles-ci sont vraies. On admettra évidemment que les Axiomes et définitions de la TMP sont des propositions vraies.

b)Si une proposition P est entraînée par des propositions $P_1,..,P_n$, on dira que P est *une déduction logique relationnelle* de $P_1,..,P_n$.

c)On verra dans un second article que les Axiomes de la TMP sont équivalents à des relations non-floues et des relations mixtes entre des objets mathématiques. On verra aussi que la quasi-totalité des propositions classiques utilisées en mathématiques (Définitions et Théorèmes) apparaissent comme étant équivalentes à des relations non-floues entre des objets mathématiques non-relationnels et sont des déductions logiques relationnelles des Axiomes de la TMP.

Une conséquence de la Remarque précédente est que des propositions vraies ne peuvent entraîner qu'une relation non-floue n'est pas binaire, ou qu'une relation cohérente n'est pas cohérente. En effet si R est une relation non-floue, alors « R est binaire » et « R est cohérente » sont des propositions vraies.

Nous avons défini plus haut des relations non-floues. On peut généraliser cette définition afin de définir des *définitions non-floues* , des *concepts généraux non-flous* et des *symboles particuliers non-flous*.

DEFINITION 2.3 :

On a les définitions suivantes fondamentales pour la TMP:

a)-Les *symboles particuliers non-flous* et les *concepts généraux non-flous* constituent 2 types (exclusifs) de symboles fondamentaux pouvant être utilisés par une définition ou une proposition et pouvant représenter des objets mathématiques.

-Un *symbole particulier* O est un symbole associé à une proposition du type « O est le symbole particulier associé à une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ (ou D(o)) », $O_1,.,O_n$ étant des symboles particuliers pré-définis, O ne pouvant représenter que des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.(On emploiera la notation $D(o,O_1,..,O_n)$ pour représenter une définition utilisant les symboles particuliers prédéfinis $O_1,..,O_n$).
-Si une définition n'utilise aucun symbole particulier pré-défini, on dira que c'est une *définition générale* et on la représentera par D(o).
(Par exemple, A et B étant des symboles particuliers prédéfinis on pourra considérer la définition D(o,A,B) : « o est élément de $A\cap B$ ») et les définitions D(o) : « o est un naturel », ou D(o) : « o est un ensemble » seront des définitions générales).

b)D(o) étant une définition générale :
-On dira qu'un objet mathématique O_0 *correspond à la définition* D(o), si on a « $D(O_0)$ est vraie ».

-On dira qu'un objet mathématique O_0 existant dans l'EMP *ne correspond pas à la définition* D(o), si on a Non(« $D(O_0)$ est vraie »).

c)-On dira qu'une définition générale D(o) est *binaire* si pour tout objet mathématique on a ou bien « $D(O_0)$ est vraie » ou bien Non(« $D(O_0)$ est vraie »).
-On dira que la définition générale D(o) *est cohérente* si pour aucun objet mathématique « $D(O_0)$ est vraie » et Non(« $D(O_0)$ est vraie »).
-On dira que D(o) est une définition générale *non-floue* si elle est binaire et cohérente.

d)« O est *un symbole particulier non-flou* associé à D(o) » signifie :

-D(o) est une définition générale non-floue.

-D(o) *est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP*, c'est-à-dire pour tout objet mathématique O_0, si $D(O_0)$ est vraie alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP.

Dans le cas où il existe au moins un objet mathématique O_0 tel que « $D(O_0)$ est vraie » on dira que O est un *concept particulier non-flou*.
On aura alors : « « O *peut représenter* O_0 » est vraie » est équivalent à « $D(O_0)$ est vraie ».
Si O n'est un concept particulier non-flou alors O sera un *symbole particulier non-flou* ne pouvant représenter aucun objet mathématique.

Si O est un *concept particulier non-flou* pouvant représenter un objet O_0, alors on pourra *considérer le cas où il représente* O_0, il représente alors le même objet O_0 partout où il est utilisé.

e)Si D(o) est une définition générale non-floue, on dira que le symbole « un C_1 » est le *concept général non-flou associé* à D(o) si on a :
-D(o) est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP (définie au d)).
-« « O_0 *appartient au concept général non-flou* « un C_1 » » (On dira aussi « O_0 est un C_1», ou « « un C_1 » *peut représenter* O_0 ») est vraie » est équivalent à « $D(O_0)$ est vraie ».
-Il existe au moins un objet mathématique O_0 tel que O_0 appartient au concept général non-flou « un C_1 ».

Plus généralement on dira que le symbole « un C_1 » est un *concept général non-flou* si :
-Pour tout objet mathématique O_0 « « O_0 appartient au concept général non-flou « un C_1 »est vraie » ou (exclusif » « « O_0 n'appartient pas au concept général « un C_1 »est vraie ».
-Si un objet mathématique O_0 appartient au concept général « un C_1 », alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP (Sauf si le concept général non-flou « un C_1 » est parmi les 2 concepts généraux non-flous « l'EMP » ou « un objet mathématique non-relationnel).
-Il existe au moins un objet mathématique O_0 tel que O_0 appartient au concept général non-flou « un C_1 ».

D'après sa définition, contrairement aux concepts particuliers non-flous, un *concept général non-flou* pourra toujours représenter les mêmes objets mathématiques quels que soient les objets mathématiques représentés par les concepts particuliers non-flous situés avant son emplacement. De plus on ne pourra pas considérer le cas où il représente un objet mathématique parmi ceux qu'il peut représenter. (Sauf s'il ne peut en représenter qu'un seul).

On verra plus loin que « un ensemble », « **N** » seront identifiés avec des concepts généraux non-flous ».

f)Si « un C_1 » et « un C_2 » sont 2 concepts généraux non-flous on dira que « un C_1 » *est inclus* dans « un C_2 » si tout objet O_0 appartenant au concept général « un C_1 » appartient au concept général « un C_2 ».

g)On définira plus loin dans la TMP des objets mathématiques identifiés aux naturels. Dans toute la partie de l'article antérieure à la définition des naturels dans la TMP , on considérera 1,. ,n non comme des naturels mais comme des signes distinctifs, *un signe distinctif* étant un concept primitif para-mathématique défini comme étant un symbole permettant de distinguer des propositions, des définitions, des concepts particuliers ou généraux ou des objets mathématiques. Dans certains cas, O_1,.,O_n sont *des concepts particuliers non-flous pouvant représenter simultanément* des objets O_{10},..,O_{n0}:

On rappelle qu'on représente par $D_i(o,O_{i1},.,O_{ik(i)})$ une définition utilisant les symboles particuliers non-flous pré-définis O_{i1},..,$O_{ik(i)}$. En général, on définira successivement les symboles particuliers non-flous O_1,..,O_n par les propositions P_1,..,P_n du type suivant :

P1 : O_1 est le symbole associé à la définition $D_1(o_1)$.
…..
Pout i dans {2,..,n) :
Pi :O_i est le symbole associé à la définition $D_i(o_i,O_{i1},..,O_{ih(i)})$ ou $D_i(o_i)$, avec $O_{i1},..,O_{ih(i)}$ parmi $O_1,..,O_{i-1}$.

$O'_{10},..,O'_{n0}$ étant des objets mathématiques quelconques, on définit les propositions suivantes $P'1(O'_{10}),..,P'n(O'_{n0})$ par :

$P'1(O'_{10})$: $D_1(O'_{10})$
….
Pour i dans {2,..,n} :
$P'i(O'_{i0})$:$D_i(O_{i0},O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ (ou $D_i(O'_{i0})$).

On dira que $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous si on a *:*

O_1 est un concept particulier non-flou (défini précédemment) et :

Pour tout i dans {2,..,n}, pour tous $O'_{10},..,O'_{i-10}$ tels que $P'1(O'_{10}),..,P'i\text{-}1(O'_{i-10})$ sont vraies :

(i)Pour tout O_0 objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP $D_i(O_0,O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. (On dira que les définitions $D_i(o_i,.)$ sont *non-floues*).

(ii)Pour tout O_0 objet mathématique si $D_i(O_0,O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ est vraie alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP. (On dira que les définitions $D_i(o_i,.)$ sont *restreintes aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP*).

(iii)Il existe O_0 tel que $P'i(O_0)$:$D_i(O_0,O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ est vraie.

$O_{10},.,O_{n0}$ étant des objets mathématiques, on dira que $O_1,..,O_n$ sont *des concepts particuliers non-flous pouvant représenter simultanément* $O_{10},.,O_{n0}$ si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous et que de plus $P'1(O_{10}),..,P'n(O_{n0})$ sont vraies.

Alors on aura de plus par définition pour {k(1),..,k(s)} inclus dans {1,.,n} $O_{k(1)},..,O_{k(s)}$ pourront représenter simultanément $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$.

Par définition, réciproquement, k(1),..k(s) étant dans {1,..,n}, {t(1),..,t(n-s)} étant l'ensemble {1..,n}/{k(1),..,k(s)}, $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ étant des objets mathématiques, $O_{k(1)},..,O_{k(s)}$ pourront représenter simultanément $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ s'il existe des objets $O_{t(1)0},..,O_{t(n-s)0}$ tels que $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$.

On rappelle qu'avant la définition de **N**, on considèrera les symboles 1,..,n utilisés précédemment comme indices non comme des naturels mais comme des signes distinctifs. s(1),..,s(p) étant des signes distinctifs, on a employé la notation « s est dans {s(1),..,s(p)} » pour « s est un signe distinctif parmi s(1),..,s(p) ».

h)On a vu précédemment que si O était le symbole particulier non-flou associé à une définition génerale non-floue D(o), et si O pouvait représenter un objet O_0, alors on pouvait considérait le cas où O représente O_0.

De la même façon si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous pouvant représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$ (définis au g), on pourra considérer le cas où $O_1,..,O_n$ *représentent simultanément* $O_{10},.,O_{n0}$.

On donne alors les définitions suivantes, compatibles avec celles données au point g) précédent :

On rappelle qu'on emploie la notation $D(o,O_1,..,O_n)$ pour représenter une définition utilisant les symboles particuliers (définis en 2.3) prédéfinis $O_1,..,O_n$.

- $O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous ,on dira que $D(o,O_1,..,O_n)$ est une *définition non-floue* si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$ et pour tout objet mathématique O_0, $D(O_0,O_{10},.,O_{n0})$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.
-$O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous, on dira que $D(o,O_1,..,O_n)$ est *restreinte* aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, si $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie alors O_0 est un objet mathématique relationnel et différent de l'EMP.
- $O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous $D(o,O_1,..,O_n)$ étant une définition non-floue restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on poura définir un *symbole particulier non-flou* par la proposition :

« $O(O_1,..,O_n)$ (noté aussi « O ») est le symbole particulier associé à $D(o,O_1,..,O_n)$ ».

-Alors, si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, il existe au moins un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP O_0 tel que $O(O_{10},..,O_{n0})$ peut représenter O_0, alors on dira que $O(O_1,.,O_n)$ est un *symbole particulier non-flou* qui est *un concept particulier non-flou*. On a alors, pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, dans le cas où $O_1,..,O_n$ *représentent simultanément* $O_{10},..,O_{n0}$ « $O(O_1,..O_n)$ (noté $O(O_{10},..,O_{n0})$) *peut représenter* O_0 » est équivalent à « « $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ».

Si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, alors $O_1,..,O_n$ représentant simultanément $O_{10},..,O_{n0}$, O peut représenter un unique objet, alors on dira que O *est défini uniquement en fonction de* $O_1,..,O_n$. On généralise cette définition $O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous quelconques pré-définis.
-Par définition, si O est un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou, il ne pourra représenter aucun objet mathématique.

Par exemple si A est le concept particulier non-flou associé à $D(o_A)$: « o_A est un ensemble », on peut définir le symbole particulier non-flou b (noté aussi b(A)) associé à la définition $D(o_b,A)$: « o_b est élément de A ». b n'est pas un concept particulier non-flou car pour A représentant l'ensemble vide, il n'existe pas d'objets pouvant être représenté par b. Et donc d'après la définition précédente b ne pourra représenter aucun objet mathématique.

On dira qu'une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ a pour *paramètres fixes* $O_1,..,O_n$ et que $O(O_1,..,O_n)$ est *défini en fonction* des symboles particuliers non-flous $O_1,..,O_n$. Un même concept particulier non-flou pourra être défini en fonction de différents ensembles de symboles particuliers non-flous.

REMARQUE 2.4 :

a)Par exemple si $O(O_1,..,O_n)$ est un concept particulier non-flou associé à une définition non-floue $D(o,O_1,.,O_n)$, alors si $O_1,..,O_n$ *peuvent représenter simultanément* les objets mathématiques $O_{10},..,O_{n0}$ et si $O(O_{10},.,O_{n0})$ peut représenter O_0, alors $O_1,..,O_n,O(O_1,.,O_n)$ *peuvent représenter simultanément* $O_{10},..,O_{n0},O_0$.

b)Si un concept général non-flou est associé à une définition, celle-ci sera toujours une définition générale.

c)Dans certains cas, un concept général non-flou « un C_1 » peut être partiellement défini en utilisant des Axiomes (Par exemple « un ensemble », « un couple »,l'EMP..). Au contraire,un symbole particulier non-flou sera toujours associé à une définition du type D(o) ou $D(o,O_1,..,O_n)$.

f)On emploiera en général la notation « un(le)(la)(l') C_1 », c'est-à-dire utilisant un article, pour représenter un concept général non-flou. (Par exemple « un corps », « un objet mathématique non-relationnel », « un espace vectoriel..). **N**,**Q**,**R** seront aussi identifiés à des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet non-relationnel (un ensemble), ce qui se justifie car par exemple

N est « l'ensemble des naturels », **Q** est « l'ensemble des rationnels »…De plus, tous les symboles représentant le même objet mathématique dans tous les textes seront considérés comme des concepts généraux(Par exemple 1,2,13..). On rappelle qu'on doit toujours définir si un symbole est identifié avec un symbole particulier non-flou ou est identifié avec un concept général non-flou, car les 2 notions sont exclusives par définition.

g)Il est fondamental de distinguer un objet mathématique non-relationnel O_0, O_0 étant identifié à un objet mathématique non-relationnel, d'un concept non flou O qui est un symbole pouvant représenter certains objets mathématique non-relationnels. Pour éviter la confusion, on mettra l'indice « 0 » à un symbole identifié à un objet mathématique. Cependant, si un concept général peut représenter un seul objet, alors on identifiera ce concept avec l'objet unique qu'il représente, sans mettre l'indice « 0 » (Par exemple **N**,**Z**.)

h)D'après la définition précédente, un concept particulier non-flou ne pourra jamais représenter l'EMP ni un objet mathématique relationnel et les seuls concepts généraux non-flous pouvant représenter l'EMP seront les chaînes de caractères « l'EMP » et « un objet mathématique non-relationnel ».

i)On a supposé implicitement qu'on emploie toujours un nouveau symbole pour définir un nouveau concept particulier ou général non-flou.

j)On peut facilement généraliser la définition d'un concept général non-flou en définissant des concepts généraux relationnels non-flous (pouvant représenter seulement des objets mathématiques relationnels), non-relationnels mixtes non-flous (pouvant représenter seulement des objets mathématiques non-relationnels mixtes) ou mixtes non-flous (pouvant représenter tout type d'objet mathématique).
De même on peut généraliser la définition d'un concept particulier non-flou en définissant des concepts particuliers relationnels non-flous ou non-relationnels mixtes non-flous ou mixtes non-flous.

Nous recherchons maintenant un Axiome permettant d'obtenir qu'une définition D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) est non-floue. (On rappelle qu'on utilisera l'expression $D(o,O_1,..,O_n)$ pour représenter une définition utilisant les symboles particuliers non-flous prédéfinis $O_1,..,O_n$). Avant de proposer un tel Axiome, nous alons donner des définitions de propositions et de définitions fondamentales qu'on a appelées *proposition mathématique simple* et *définition mathématique simple*.

On admet l'Axiome suivant concernant les concepts mathématiques fondamentaux de la TMP :

AXIOME 2.4A :

Les symboles composés « un ensemble (suivi éventuellement de « non vide ») », « un objet mathématique non-relationnel (suivi éventuellement de « différent de l'EMP »)», « l'ensemble vide » , « un couple » sont des concepts généraux non-flous.

Les symboles « est élément de », « est le 1^{ier} (ou le 2ième) terme de », « est identique à (implicitement : « un objet mathématique non-relationnel ») (représenté souvent par «= ») » sont des chaines de caractères (appelées *concepts relationnels généraux*) représentant chacune une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité 2.

REMARQUE 2.4B :

a)On remarque que la proposition « R représente une unique relation non-floue. » signifie que non seulement R peut représenter un seul objet mathématique reationnel (considéré comme concept général relationnel) mais aussi que celui-ci est un unique objet de l'EMP.

b)On remarque que la proposition « « un C_1 » est un concept général non-flou » est équivalente à la proposition « « est un C_1 » est une relation non-floue qui n'est pas la relation impossible ».

En utilisant l'Axiome précédent, on peut définir une définition mathématique simple et une proposition mathématique simple :

DEFINITION 2.5 :

I)DEFINITION MATHEMATIQUE SIMPLE ET DEFINITION INTERNE AUXILIAIRE.

A)1)Une définition D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) sera une *définition mathématique simple* si :
(i)Elle est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.
(ii)$O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous.
(iii)Elle utilise seulement :
-Les concepts particuliers non-flous prédéfinis $O_1,\ldots,O_n$.
- « o ».
-Des *concepts primitifs relationnels* ayant leur signification usuelle parmi : « pour tout », « Il existe (suivi éventuellement d' « un et un seul ») , « est », « appartient au concept général » , « tel que », « Non », « et », «ou », « si…,alors », « est équivalent à ».
-Des *symboles de ponctuation* « virgule (« , »), « parenthèses » (« (« et «) »), « point » (« . »), « guillemets » (« « » et « » »), accolades («{» et « } »), « blanc » .
-Des concepts généraux non-flous (Notamment ceux de l'Axiome 2.4A).
-Des concepts relationnels généraux représentant chacun une unique relation non-floue (Notamment ceux de l'Axiome 2.4A).

-Des nouveaux symboles (noté B ou C_m) chacun étant associé à une définition dite *définition auxiliaire* par une expression du type :
« B est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ (ou $D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q)$) (ou une définition analogue n'utilisant pas $P_1,.,P_q$) » ou « C_m est le symbole particulier (défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-1}$) associé à la définition auxiliaire (de niveau m) D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) (ou une définition analogue n'utilisant pas $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$). ».

Si on connaît la chaîne de caractère représentée par « D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) », en la représentant par « « D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) » », on utilisera l'expression : « C_m est le symbole particulier (défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-1}$) associé à la définition auxiliaire (de niveau m) D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) : « D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$). » »

On dira que B (ou C_m) est un *nouveau symbole particulier* associé à la définition auxiliaire $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ (ou D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$)).

On appellera les propositions précédentes *définition* de B(ou de C_m) (dans $D(o,O_1,..,O_n)$). Dans une définition mathématique simple 2 définitions de symboles particuliers ne pourront utiliser le même symbole comme symbole particulier qu'elles définissent.
Les *définitions auxiliaires* sont définies comme suit :

2)DEFINITIONS AUXILIAIRES :

SYMBOLES PARTICULIERS NON-FLOUS

On a défini en 2.3 un *symbole particulier non-flou* comme un symbole particulier associé à une *définition non-floue* $D(o,O_1,.,O_n)$, avec $O_1,..,O_n$ concepts particuliers non-flous pré-définis. On généralise cette définition en admettant que si $O_1,..,O_n$ sont des symboles particuliers non-flous pré-définis non nécessairement des concepts particuliers non-flous, $D(o,O_1,.,O_n)$ est aussi une *définition non-floue*.

Si O est un symbole particulier associé à une définition non-floue $D(o,O_1,.,O_n)$, O sera par définition *un symbole particulier non-flou*. Mais si l'un des O_i n'est pas un concept particulier non-flou, alors par définition O ne pourra représenter aucun objet mathématique.

Un symbole particulier sera ou bien associé à une définition mathématique simple ou bien à une définition auxiliaire contenue par une définition mathématique simple.

DEFINITION RESTREINTE

O_1,..,O_n étant des concepts particuliers non-flous, on a déjà défini en 2.3 une définition D(o,O_1,.,O_n) *restreinte* aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP. On généralise et on complète cette définition en admettant que O_1,..,O_n étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, l'un d'entre eux n'étant pas un concept particulier non-flou, alors D(o,O_1,.,O_n) est aussi *restreinte* aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

On admettra que par définition, une définition auxiliaire contenue par une proposition mathématique simple est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

a)CAS PARTICULIERS DE DEFINITIONS AUXILIAIRES

Une définition mathématique simple peut donc utiliser des nouveaux symboles associés à des *définitions auxiliaires* et pouvant être de différents types :
(On représentera les nouveaux symboles associés à des définitions par des majuscules. On écrira aussi parfois « symbole associé à une définition auxiliaire » au lieu de « symbole particulier associé à une définition auxiliaire »).

(i)Un symbole particulier B associé à une définition auxiliaire (dite de niveau 0) D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q) (ou D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q) ou une définition analogue n'utilisant pas P_1,..,P_q), avec :
-P_1,.,P_q sont parmi O_1,..O_n.
-La définition de B n'est contenue dans aucune définition auxiliaire.
On dira que D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q) (ou D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q)) est une définition auxiliaire de niveau 0 *interne* à D(o).

(ii) Un symbole particulier B associé à une définition auxiliaire (dite de niveau 0) D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q) (ou D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q)), avec :
-P_1,.,P_q sont des symboles parmi O_1,..O_n ou sont associés à une définition auxiliaire interne de niveau 0, leur définition précédant celle de B.
-La définition de B n'est contenue dans aucune définition auxiliaire.
On dira que D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q) est une définition auxiliaire de niveau 0 *interne* à D(o).

(iii)Une définition mathématique simple D(o) (ou D(o,O_1,..,O_n)) pourra utiliser un nouveau symbole T à l'intérieur d' une définition auxiliaire contenue dans D(o) (ou D(o,O_1,..,O_n)) ou à l'extérieur de toute définition auxiliaire contenue dans D(o) (ou D(o,O_1,..,O_n)) .

Par définition, une définition mathématique simple D(o) (ou D(o,O_1,..,O_n)) ne pourra utiliser un nouveau symbole T à l'extérieur de toute définition auxiliaire que dans le cas suivant :

-T est un symbole particulier associé à une définition auxiliaire de niveau 0, sa définition précédant son utilisation.
(iv)La définition auxiliaire *de niveau* 0 d'un symbole particulier B telle que définie en (ii) pourra contenir un nouveau symbole C, (dit *défini en fonction de* o_b), associé à une définition auxiliaire (dite *de niveau* 1) de type D_{auxI1}(o_c,o_b,P_1,.,P_q), (ou de type D_{auxI1}(o_c,P_1,.,P_q) ou de type D_{auxI1}(o_c,o_b,o,P_1,.,P_q) ou de type D_{auxI1}(o_c,o,P_1,.,P_q) ou une définition analogue n'utilisant pas P_1,.,P_q), (dite *définition auxiliaire interne à la définition de* B), avec :

-Il n'existe pas de nouveau symbole particulier K dont la définition est contenue dans la définition auxiliaire de niveau 0 considérée et contient la définition de C.

-P_1,..,P_q sont :

Ou bien parmi $O_1,..,O_n$.
Ou bien associés à des définitions auxiliaires de niveau 0 leur définition précédant celle de C.
Ou bien sont des symboles particuliers définis en fonction de o_b et associés à une définition auxiliaire de niveau 1, leur définition précédant celle de C.

C étant associé à une définition auxiliaire contenue par D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$), on dira qu'un symbole particulier D est *pré-défini au sens strict avant* C si D est parmi $O_1,..,O_n$ ou si dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) la définition de D précède celle de C. On dira que D *est pré-défini au sens large* avant C si D est pré-défini au sens strict avant C dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$)ou si la définition de D contient celle de C, D étant différent de C.

Dans cet article, nous utiliserons des définitions auxiliaires de niveau maximal 1. On n'utilisera donc pas la définition générale des définitions auxiliaires suivante.

b)CAS GENERAL DES DEFINITIONS AUXILIAIRES

Plus généralement, on définit par récurrence une définition auxiliaire de niveau m dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) :

(j)Une *définition auxiliaire interne* à une définition auxiliaire de niveau m-1 est une définition auxiliaire de niveau m.
(jj)Supposons que C_{m-1} est un symbole défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-2}$ associé à une définition auxiliaire de niveau m-1 $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\dots o_{rk},P_1,\dots,P_q)$.

On admet que par définition, une définition auxiliaire contenue par une proposition mathématique simple est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

Alors $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\dots o_{rk},P_1,\dots,P_q)$ pourra contenir un symbole particulier C_m (défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-1}$) et associé à une définition auxiliaire (dite *de niveau* m et *interne* à la définition de C_{m-1}) D_{auxm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$), avec :

-Il n'existe pas de nouveau symbole particulier K dont la définition est contenue dans la définition auxilliaire associée à C_{m-1} et contient la définition de C_m.

-$o_{s1},..,o_{st}$ sont parmi $o,o_0,.,o_{m-1}$. (Par convention, si l'un des o_{si} est identique à « o », ce sera o_{s1} et si « o_{si} » est différent de « o » , alors C_{si} est le symbole particulier à une définition auxiliaire de niveau si $D_{auxsi}(o_{si},..)$.

-$Q_1,..,Q_r$ sont des symboles particuliers pré-définis au sens strict avant C_m et :
Ou bien sont parmi $O_1,\dots,O_n$ ou bien sont des symboles associés à des définitions interne à D(o) de niveau 0 ou bien sont tels que pour tout i dans {1,..,r} Q_i est un symbole particulier associé à une définition auxiliaire interne de niveau k(i) inférieur ou égal à m et défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{k(i)-1}$.

On dira alors que $C_0,\dots,C_{m-1}$, $Q_1,..,Q_r$ sont des *symboles particuliers pré-définis au sens large* pouvant être utilisés à l'emplacement de D_{auxm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$).

Dans le cas d'une définition D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) ,O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, cela signifiera que dans $D(O_0)$ ou dans $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$, C_m est le symbole particulier associé à D_{auxIm} (o_m, $C_{s1},..,C_{st}$, $Q_1,..,Q_r$). Les C_{si} dépendent alors de $O_0,O_{10},..,O_{n0}$. On aura C_{s1} est identique à O_0 si o_{s1} est identique à o.

Une définition auxiliaire de niveau m-1 $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\dots o_{rk},P_1,\dots,P_q)$ pourra utiliser un nouveau symbole particulier T de la définition mathématique simple considérée D(o) à l'intérieur d'une définition auxiliaire qu'elle contient ou à l'extérieur de toute définition auxiliaire qu'elle contient.

Par définition, une définition auxiliaire interne de niveau m-1 $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\ldots o_{rk},P_1,\ldots,P_q))$ ne pourra utiliser un nouveau symbole particulier T à l'extérieur de toute définition auxilliaire qu'elle contient que dans les cas suivants :

-T est parmi $P_1,..,P_q$.
-T est un symbole particulier associé à une définition auxilliaire de niveau m interne à $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\ldots o_{rk},P_1,\ldots,P_q)$.

Une définition auxiliaire pourra aussi utiliser les concepts primitifs relationnels, les concepts généraux non-flous et les symboles représentant une unique relation non-floue que peut utiliser une définition mathématique simple.

Dans une définition mathématique simple, un même symbole ne pourra être associé à 2 définitions auxiliaires distinctes.

B)INTERPRETATION PLATONISTE D'UNE DEFINITION MATHEMATIQUE SIMPLE.

On conserve les notations du A) du cas général des définitions auxiliaires.
Supposons que dans une définition mathématique simple, on ait l'expression :
Exp1 : « C_m (est le) symbole particulier associé à D_{auxIm} $(o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$ ».
Par convention, C_m aura exactement la même signification que défini dans l'expression Exp2 :
Exp2: « C_m est le symbole particulier associé à D_{auxIm} $(o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r)$ ».(Avec C_{s1} est identique à o si o_{s1} est identique à o).

D_{auxIm} $(o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$ et à D_{auxIm} $(o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r)$ seront les 2 types de *définition auxiliaire* qu'on pourra utiliser dans une définition mathématique simple. Si C_m est défini par une expression de type Exp1 ou Exp2, on dira qu'il est *explicitement associé à une définition auxiliaire*. Utilisant une expression de type Exp1 ou Exp2, on devra nécessairement avoir les chaines de caractères « D_{auxIm} $(o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$: » et « D_{auxIm} $(o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r)$: » suivies par les chaînes de caractères qu'elles représentent.

Par convention, C_m étant défini par l'expression Exp2 ou Exp1, C_m aura la même signification que défini par l'expression Exp3 :
Exp3: « C_m est tel que D_{auxIm} $(o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r)$ ».(Avec C_{s1} est identique à o si o_{s1} est identique à o).

Une expression de type Exp3 pourra donc être utilisée dans une définition mathématique simple. On dira alors que C_m est *implicitement associé à une définition auxiliaire*.

Les expressions précédentes seront en accord avec les règles suivantes dans une définition mathématique simple :
-Dans l'expression Exp1, par convention, le symbole « o_{si} » aura la même signification que le symbole « C_{si} » (Sauf « o_{s1} » si « o_{s1} » est identique à « o »), sauf à l'intérieur d'expressions de type Exp2 ou Exp3 contenue par Exp1 où on devra utiliser uniquement le symbole « C_{si} ». De plus on ne pourra utiliser l'expression de type Exp1 que si $C_{s1},..,C_{st}$ sont explicitement associés à des définitions auxiliaires.
-On pourra utiliser une expression de type Exp2 $C_{s1},.,Q_r$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés à son emplacement, qu'ils soient implicitement ou explicitement associés à une définition auxilaire. Dans l'expression Exp2, par convention le symbole « o_m » aura la même signification que le symbole « C_m » sauf à l'intérieur d'expression de type Exp2 ou Exp3 qu'elle contient strictement où on devra utiliser seulement le symbole « C_m » (et non « o_m»).
- On pourra utiliser une expression de type Exp3 $C_{s1},.,Q_r$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés à son emplacement, qu'ils soient implicitement ou explicitement associés à une définition auxilaire. Dans l'expression de type Exp3, on devra toujours utiliser les symboles $C_m,C_{s1},..,C_{st}$ (Et non o_m, $o_{s1},..,o_{st}$).

Et donc $D_1(o,O_1,..,O_n)$ étant une définition mathématique simple, on pourra toujours obtenir à partir de celle-ci une définition $D_2(o,O_1,..,O_n)$ dans laquelle tous les nouveaux symboles particuliers sont explicitement associés à des définitions auxiliaires et qui a exactement la même signification que

$D_1(o,O_1,..,O_n)$. On dira alors que $D_2(o,O_1,..,O_n)$ est une *définition mathématique simple primitive*, qu'on appellera une *interprétation Platoniste* de $D_1(o,O_1,..,O_n)$.

Réciproquement pour montrer qu'une définition $D_1(o,O_1,.,O_n)$ est une définition mathématique simple, il suffira d'obtenir à partir de celle-ci une définition mathématique simple primitive $D_2(o,O_1,.,O_n)$ interprétation Platoniste de $D_1(o,O_1,.,O_n)$.

Dans la section suivante nous allons voir que dans une définition mathématique simple l'utilisation des symboles de ponctuation et des concepts primitifs relationnels doit obéir à des règles, dites *règles de ponctuation* et *règles d'utilisation des concepts relationnels primitifs* dans une définition ou une proposition mathématique simple.

II)PROPOSITION MATHEMATIQUE SIMPLE

A)INTERPRETATION PLATONISTE D'UNE PROPOSITION MATHEMATIQUE SIMPLE.

Une proposition P (ou $P(O_1,..,O_n)$) sera une *proposition mathématique simple* si elle utilise les mêmes termes et obéit aux mêmes règles que ceux d' une définition mathématique simple $D(o,O_1,..,O_n)$ telle que définie en I)A, excepté le symbole « o ». Et donc dans $P(O_1,..,O_n)$ pourra utiliser des nouveaux symboles associés à des définitions auxiliaires, celles-ci étant définies de la même façon que dans le cas d'une définition mathématique simple .

De la même façon qu'une définition mathématique simple, une proposition mathématique simple $P_1(O_1,.,O_n)$ pourra utiliser des symboles particuliers *implicitement* associés à des définitions auxiliaires. On définit aussi de façon analogue au cas d'une définition mathématique simple *l'interprétation Platoniste* d'une proposition mathématique simple.

B)REGLES DE PONCTUATION ET D'UTILISATION DES CONCEPTS RELATIONNELS PRIMITIFS, DES CONCEPTS GENERAUX ET DES RELATIONS NON FLOUES.

Une définition ou une proposition mathématique simple devra respecter des règles, dites *règles de ponctuation d'une définition ou d'une proposition mathématique simple*.

On appellera *proposition auxiliaire (d'une proposition ou d'une définition mathématique simple)* une chaîne de caractères utilisées dans une proposition ou une définition mathématique simple. Elle devra donc être en accord avec la définition d'une définition ou d'une proposition mathématique simple.

a)REGLES DE PONCTUATION ET DES PROPOSITIONS AUXILIAIRES.

Les expressions « virgule », « point », « parenthèse », « accolade » désigneront des symboles en caractères « ordinaires », et donc ni « exposant » ni « indice ».
(i)Si dans la proposition ou la définition mathématique simple considérée on a un nouveau symbole particulier x qui est associé implicitement à une définition auxiliaire de type $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$, alors on aura nécessairement des guillemets autour de « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » dans une expression du type « x (est) tel que « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » » (Les C_{sj} étant des symboles particuliers pré-définis au sens large pouvant être utilisés dans la définition auxiliaire considérée, C_{s1} pouvant cependant être identique à « o » dans une définition mathématique simple « D(o) »), sauf dans le cas où « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » ne contient pas de concepts primitifs relationnels (« tel que », « et »…) ni aucun symbole ponctuation « point » ou « guillemet » ni « virgule suivi du symbole « blanc » » et de plus est suivie immédiatement par un concept primitif relationnel ou par un symbole de ponctuation « point » ou « guillemet » ou « « virgule » suivi du symbole « blanc » » (On dira alors que « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » est du type P_{AR}) car dans ce cas on pourra omettre les guillemets autour de « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » en conservant par convention la même signification et de même dans 2 autres cas (du type P_{AE} ou P_{AT}) que l'on définira dans le paragraphe suivant. On rappelle qu'on mettra aussi nécessairement des guillements autour de « $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$ » dans une

expression du type « x est le symbole particulier associé à $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$: « $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$ » » .

On aura aussi nécessairement des guillemets autour d'une proposition auxiliaire « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» (Les B_i étant des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés à l'emplacement de la proposition auxiliaire considérée, mais un B_i pourra être identique à « o » dans une définition mathématique simple « D(o) » ou à o_x ou o_{ij} dans une définiton auxiliaire $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, D_1,.,D_p)$), dans une proposition auxiliaire du type P_{AT} : « Pour tout x_1 tel que « $D_1(x_1,A_{11},..,A_{1r(1)})$ » ,..,pour tout x_k tel que « $D_k(x_k,A_{k1},..,A_{kr(k)})$ » , « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$», » ou du type P_{AS} : « Si x_1 est tel que « $D_1(x_1,A_{11},..,A_{1r(1)})$ » ,.., x_k est tel que « $D_k(x_k,A_{k1},..,A_{kr(k)})$ », alors « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» » (pour j parmi 2,..k, $A_{j1},.,A_{jr(j)}$ symboles particuliers pré-définis au sens large pouvant être utilisés dans les définitions auxiliaires considérées et donc aussi être parmi $x_1,..,x_{j-1}$, mais l'un d'eux pouvant être identique à « o » dans une définition mathématique simple D(o) ou à o_x ou o_{sj} dans une définition auxiliaire) à l'exception des 2 cas suivants :

(j) : « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» ne contient aucun concept primitif relationnel ni aucun symbole de ponctuation « guillemet » ou « point suivi du symbole « blanc » » ou « virgule suivi du symbole « blanc » » et est précédée et suivie immédiatement par un concept primitif relationnel ou par un symbole de ponctuation « guillemet » ou « point » ou « virgule suivi du symbole « blanc » ». On dira alors que cette proposition auxiliaire est du type P_{AR}.

(jj) « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» est du type P_{AT} ou (défini plus haut) ou P_{AE} : «Il existe (suivi éventuellement de « un et un seul ») x_1 tel que « $P(x_1,B_1,..,B_p)$» ».

On admettra en effet que d'après les règles de ponctuation les propositions auxiliaires de type P_{AR}, P_{AT}, P_{AE} ont par convention la même signification avec des guillemets comme premier et dernier symbole que sans guillemets. On mettra aussi nécessairement des guillemets autour d'une proposition du type P_{AS} définie plus haut (Si x_1 est tel que..,..,alors..)). On admettra aussi que P_A étant une proposition auxiliaire, « « P_A » » (entourée de 2 paires de guillemets) a la même signification que « « P_A » » (entourée d'une seule paire de guillemets).

D'après les règles de ponctuation précédente, on pourra omettre les guillemets autour de « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » dans une expression du type « x (est) tel que « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » », si « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » est du type P_{AT}, P_{AE} ou P_{AR}.

(ii)$P(A_1,..,A_p)$ et $Q(B_1,..,B_k)$ étant des propositions auxiliaires *indépendantes*, (C'est-à-dire que les A_i et les B_i sont des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés au début des propositions auxiliaires composées considérées, ce qui impose qu'aucun des B_i ne peut être défini dans $P(A_1,..,A_p)$, mais un B_i ou un A_i pourra être identique à « o » dans une définition mathématique simple « D(o) », ou à « o_x », « o_{s1} », .., « o_{sk} », dans une définition auxiliaire « $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, D_1,.,D_p)$ »), on aura nécessairement des guillemets au début et à la fin des propositions auxiliaires du type : , « « $P(A_1,..,A_p)$ » ou (ou « et » ou « , », ou « est équivalent à ») « $Q(B_1,..,B_k)$ » », « si « $P(A_1,..,A_p)$ » alors « $Q(B_1,..,B_k)$ » ». On mettra aussi des guillemets autour de « $P(A_1,..,A_p)$ » et de « $Q(B_1,..,B_k)$ » sauf si ces propositions sont du type P_{AR}, P_{AE} ou P_{AT} , d'après les règles de ponctuation données en (i). On admettra aussi que, P_A étant une proposition auxiliaire, « «Non(« P_A »)» » (avec des guillemets), a la même significationque «Non(« P_A ») » (sans guillemets mais nécessairement des guillemets autour de « P_A », même si P_A est du type P_{AR}, P_{AE}, ou P_{AT}). De plus, $P_{A1},..,P_{Ak}$ étant des propositions auxiliaires indépendantes (avec k>2), on pourra utiliser la proposition « « P_{A1} »et..et « P_{Ak} » » et la proposition « « P_{A1} »ou..ou « P_{Ak} » ». Par convention la proposition « « P_{A1} »,.., « P_{Ak-1}» et « P_{Ak} » » (remplaçant tous les symbole « et » sauf le dernier par le symbole de ponctuation « virgule ») aura la même signification que « « P_{A1} »et..et « P_{Ak-1} » et « P_{Ak} » ».

On pourra omettre les guillements autour d'une expression du type précédent si cette expression constitue la totalité de la proposition mathématique simple considérée.

(iii)Les guillemets ouverts («) » et fermés (»), employés par la proposition mathématique simple considérée P_i seront utilisés seulement dans des expressions du type précédent ((i) et (ii)). Ils détermineront le début et la fin d'une proposition ou d'une définition auxiliaire (sauf dans les exceptions exposées en (i) et (ii) où elles seront implicites), qui nécessairement contiendra le même nombre de guillemets ouverts que de guillemets fermés. En effet d'après les règles de ponctuation, si une proposition auxiliaire contient une partie d'une proposition ou d'une définition auxiliaire Q_{aux},

alors elle contiendra nécessairement toute la proposition auxiliaire Q_{aux}. On pourra considérer que P_i elle-même est une proposition auxiliaire. Donc une proposition auxiliaire sera ou bien identique à P_i ou bien utilisée dans une expression du type de celles introduites en (i) et (ii).

Un guillemet fermé (»), implicite ou explicite, ne pourra pas être suivi immédiatement par un guillemet ouvert («), implicite ou explicite, ce qui signifie que 2 propositions auxiliaires successives seront nécessairement séparées par le symbole de ponctuation « , » (ayant la signification de « et ») ou d'un concept relationnel primitif.

(iv)Le symbole « point » sera le dernier symbole élémentaire de P_i et ne pourra être utilisé que dans ce cas et des cas définis par des règles définissant une proposition mathématique simple. (Celles-ci pourront être modifiées et complétées).

(v)Les symboles de ponctuation « parenthèses » et « virgule » seront utilisés ou bien dans les expressions du type précédent (i) et (ii), ou bien dans une expression du type $x(O_1,..,O_n)$, x étant un symbole particulier associé à une définition mathématique simple ou une définition auxiliaire $D(o,O_1,..,O_n)$ (Le symbole « x » étant choisi par convention sans contenir les symboles « virgule » ou « point » ou « parenthèse » ou « blanc »), ou dans des expressions de type $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$, contenant au moins un « O_i » ou un « C_i » et pouvant se réduire à « O_1 » ou à « C_1 », avec :

-$O_1,..,O_n$ symboles particuliers pré-définis par des définitions auxiliaires ou par des définitions mathématiques simples ou du type « o » dans une définition mathématique simple D(o,..) ou du type o_i ou o_{ij} dans une définition auxiliaire $D_{auxi}(o_i,o_{i1},..,o_{is(i)},..)$, et $C_1,..,C_p$ concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet.

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ ne contient aucune relation non-floue ni concept primitif relationnel ni symboles de ponctuation excepté des symboles « parenthèses » ou « virgule » ou « accolades » ni symboles « blanc » ni le symbole « point » si celui-celui-ci est le dernier symbole de $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$. S'il est utilisé dans une expression du type précédent, ou bien il sera contenu dans un symbole concept général non-flou de type « $._{ind}$ » ou bien il pourra être identifié avec un tel concept général d'après les *règles syntaxiques de convention symbolique*. (Notamment pour représenter le « produit scalaire » classique).

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ est immédiatement précédé d'un symbole « blanc » ou d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un « guillemet ouvert » et est immédiatement suivi d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un symbole parmi « blanc » ou « point » ou « guillemet fermé » ou « virgule », celle-ci étant suivi d'un symbole « blanc ».

-Si $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ contient une parenthèse ouverte « (», elle contiendra nécessairement une unique parenthèse fermée «) », postérieure à la précédente, les 2 parenthèses contenant le même nombre de parenthèses ouvertes que de parenthèses fermées. On dira que de telles parenthèses *se correspondent*. Toute parenthèse contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ aura nécessairement une unique parenthèse lui correspondant et contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$.

-On définit de façon analogue au point précédent 2 symboles de ponctuation « accolades » (« { » ou « } ») qui *se correspondent*. Toute accolade contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ aura nécessairement une accolade lui correspondant, unique et contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$.

-Tout symbole de ponctuation « virgule » contenu par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ appartiendra ou bien à 2 parenthèses qui se correspondent ou bien à 2 accolades qui se correspondent contenues par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sauf s'il est suivi d'un caractère « indice ».

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ peut contenir un certain type de concept général non-flou, appelé « fonction-concept », (ex. U, ∩, Im, *F*..) qu'on définira plus loin.

-Dans le cas où $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ contient un nombre décimal (concept général correspondant à sa définition classique), de partie entière a et de partie décimale b, on le représentera par « $a,_D b$ » (Avec l'indice « D » au symbole « virgule »), afin que ce symbole soit distinct du symbole « virgule » utilisé entre 2 parenthèses ou 2 accolades qui se correspondent.

Alors des règles, appelées *règles syntaxiques de convention (symbolique)*, permettront dans certains cas d'identifier $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec un symbole particulier non-flou associé implicitement à une définition auxiliaire ou avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet. Dans tous les autres cas, par définition, $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sera identifié à un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique. Par exemple, d'après les règles syntaxiques de convention (symbolique), on pourra identifier $(C_1,..,C_p)$ avec un concept général non-

flou pouvant représenter un unique objet et si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous $(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec un concept particulier non-flou et dans les autres cas $(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique.

(vi) Les symboles de ponctuation « accolades » seront utilisés ou bien dans des expressions $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ définies précédemment, ou bien dans des propositions auxiliaires de type : « S={x tel que P(x,..)} ». Nous donnerons plus loin la signification de cette proposition auxiliaire qui coïncide avec sa définition classique.

b)REGLES D'UTILISATION DES CONCEPTS PRIMITIFS RELATIONNELS

Des *règles d'utilisation des concepts primitifs relationnels* détermineront l'emploi des ces derniers dans une proposition mathématique simple. En particulier :
(j)Les concepts primitifs « Non », « et », « ou », « si..,alors », « tel que », « est équivalent à » seront utilisés seulement dans des propositions auxiliaires du type de celles introduites en (i) et (ii).
(jj) « Pour tout » et « Il existe » seront utilisés seulement dans des propositions auxiliaires du type suivant ou ayant par convention la même signification :
-« Pour tout x_1 tel que « $D_1(x_1,A_{11},..,A_{1r(1)}$ »,..,pour tout x_k tel que « $D_k(x_k,A_{k1},..,A_{kr(k)}$ », « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$», ».
-« Il existe (un et un seul) x tel que « $P(x,B_1,..,B_p)$ »».
Par exemple, x étant un symbole jamais utilisé et A un symbole particulier pouvant représenter seulement des ensembles, « Si x est élément de A » aura par convention la même signification que « si x est tel que x est élément de A » et « pour tout x élément de A » que « Pour tout x tel que x est élément de A ». Si B est un ensemble jamais encore utilisé, « Si B est un ensemble (non vide) » aura la même signification que « Si B est tel que B est un ensemble (non vide) ».

c)REGLES D'UTILISATION DES CONCEPTS GENERAUX

Si « un(e) C_{1G} » est un concept général non-flou pouvant représenter au moins 2 objets mathématiques (« un(e) C_{1G} » n'étant pas une fonction-concept, type de concept général non-flou qu'on définira plus loin) est utilisé dans une proposition ou une définition mathématique simple, alors « un C_{1G} » sera nécessairement utilisé dans une proposition auxiliaire du type « $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ est (ou « appartient au concept général ») un C_{1G} » ($E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ défini en a)v)).
Si F_C est une fonction-concept, F_C sera utilisé seulement dans une expression du type $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ telle qu'on l'a défini en a)v) ou dans une proposition auxiliaire du type « $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ appartient au concept général F_C. »

d)REGLES D'UTILISATION DES RELATIONS NON FLOUES.

Tout concept relationnel R représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité maximal s utilisé dans une proposition mathématique simple le sera dans une proposition auxiliaire de type (ou ayant la même signification d'après les *règles syntaxiques de convention* (voir a)v))que) : « $R(E_1(O_{11},..,O_{1n(1)}, C_{11},..,C_{1p(1)})$,..,$E_s(O_{s1},..,O_{sn(1)}, C_{s1},..,C_{sp(s)})$) », les $E_j(O_{j1},..,O_{jn(1)}, C_{j1},..,C_{p1p(j)})$ étant des expressions définies précédemment dans la section a)v), sauf dans certains cas définis par les règles syntaxiques de convention comme par exemple « = » dans la proposition auxiliaire de type « S ={x tel que $P(x,O_{11},..,O_{1n(1)})$} » ou dans une proposition auxilaire du type «$a_1Ra_2R..Ra_n$ », R étant une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 et transitive. (ex. >, <, =, …). Cependant d'après les règles syntaxiques de convention les propositions auxilaires précédentes auront la même signification que des propositions auxiliaires en accord avec les Règles d'utilisation des relations non-floues.
Réciproquement, une expression du type $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sera nécessairement utilisée dans une proposition auxiliaire concernée par les règles précédentes d'utilisation des relations non-floues et des concepts généraux non-floues ou s'il se réduit à O_1 dans une proposition auxiliaire de type ou ayant la signification de « O_1 (ou $(O_1,.,O_k)$) est tel que $D(O_1,..,)$ ».

Une proposition ou une définition mathématique simple pourra donc contenir une expression du type précédent, « R » étant précédé du symbole « blanc » et les symboles « virgule » séparant les $E_j(O_{j1},..,O_{jn(1)}, C_{j1},..,C_{p1p(j)})$ étant les seules qui n'appartiennent pas à 2 accolades ou à 2 parenthèses qui se correspondent exceptées les parenthèses se correspondant contenant tous les $E_j(O_{j1},..,O_{jn(1)}, C_{j1},..,C_{p1p(j)})$ c'est-à-dire celle précédée immédiatement de « R » et celle suivie immédiatement de « guillemet » ou « point ». On a donc un nouveau cas d'utilisation du symbole de ponctuation « parenthèse ».

Cependant on n'utilisera pas en général et notamment dans nos 2 articles de telles expressions, car R sera toujours d'ordre de multiplicité 2, et on utilisera la règle syntaxique de convention que si a et b sont 2 symbole particuliers non-flous ou concepts généraux représentant un unique objet, « aRb » a la même signification que « R(a,b) ».

C) $P(O_1,.,O_n)$ étant une proposition mathématique simple, « $P(O_1,..,O_n)$ est vraie » signifie :
(i)$O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous.
(ii)Pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..O_n$, $P(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie.

D)D(o) étant une définition mathématique simple générale, O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, par définition, « $D(O_0)$ est vraie » est équivalent à « $D(O_0)$ est une proposition mathématique simple vraie », identifiant O_0 avec le concept particulier non-flou pouvant représenter seulement O_0.
On généralise ceci au cas d'une définition de la forme $D(o,O_1,.,O_n)$.

D'après la signification du concept primitif « tel que », si $D(o,O_1,..,O_n)$ est une définition mathématique simple, alors la proposition « x est le concept particulier associé à la définition $D(o,O_1,..,O_n)$ sera équivalente à ce que la proposition $P(O_1,.,O_n)$: « x est tel que $D(x,O_1,..,O_n)$ » soit une proposition mathématique simple vraie. « x est le symbole particulier associé à $D(o,O_1,..,O_n)$ et x n'est pas un concept particulier non-flou » sera équivalent à « $P(O_1,.,O_n)$ n'est pas une proposition mathématique simple vraie ».

III)PROPOSITION MATHEMATIQUE SIMPLE VRAIE

Préambule :
(i)D'après la définition d'une proposition mathématique simple $P(O_1,.,O_n)$ (et notamment le fait qu'elle peut utiliser des symboles particuliers associés à des définitions auxiliaires en dehors de toute définition seulement si ces symboles particuliers sont associés à des définitions auxiliaires de niveau 0), on remarque que le fait que $P(O_1,..,O_n)$ soit vraie dépend seulement de $O_1,..,O_n$ et des objets mathématiques pouvant être représentés par les symboles particuliers associés à des définitions auxiliaires de niveau 0 contenues dans $P(O_1,.,O_n)$.

(ii)Considérons une proposition mathématique simple contenant la définition d'un symbole particulier B associé à une définition auxiliaire de niveau 0 $D(o_B,P_1,.,P_p)$. On remarque que B est *complètement déterminé* (C'est-à-dire s'il est un concept particulier non-flou et dans ce cas les objets mathématiques qu'il peut représenter) par $P_1,.,P_p$. De plus, si $D(o_B,P_1,..,P_n)$ contient la définition d'un symbole particulier H_i associé à une définition auxiliaire $D_{auxHi}(o_{Hi}, H_{i1},..,H_{ip(i)})$, H_i est *complètement déterminé* par $H_{i1},..,H_{ip(i)}$. Il en résulte H_i est *complètement déterminé* par $P_1,..,P_p$.

A)PROPOSITIONS INDEPENDANTES-PROPOSITIONS IRREDUCTIBLES-REGLE DES PROPOSITIONS AUXILIAIRES INDEPENDANTES.

a)P1 et P2 étant 2 propositions mathématiques simples,on dira que P1 et P2 sont *indépendantes* si P2 n'utilise aucun symbole particulier non-flou défini dans P1 et réciproquement. On remarque que si P1 et P2 sont 2 propositions mathématiques simples indépendantes, alors « Si « P1 » alors « P2 » » est à cause de la signification du concept primitif « si..alors » équivalent à « « P2 » ou Non(P1) ».De même on peut exprimer « « P1 » est équivalent à « P2 » » en utilisant les concepts primitifs « ou », « et », « Non ». En particulier, si P1 est une proposition ne contenant aucune définition auxiliaire, elle sera indépendante relativement à toutes les autres propositions.

P étant une proposition mathématique simple, on dira que P est *irréductible au sens strict* si P n'est pas exprimée sous la forme « « P1 » ou « P2 » », « « P1 » et « P2 » », « Non(P1) », « « P1 » est équivalent à « P2 » », ou « si « P1 » alors « P2 » »,P1 et P2 étant des propositions mathématiques simples indépendantes .

On admet alors comme évident (Ce qu'on pourra vérifier sur toutes les propositions mathématiques simples) que toute proposition mathématique simple $P(O_1,.,O_n)$ ou bien est irréductible au sens strict ou bien s'exprime sous la forme de k propositions mathématiques simples indépendantes irréductibles au sens strict P1,.,Pk et des concepts primitifs « si..alors », « ou », « Non », « et », « est équivalent à ». Si $O_{10},.,O_{n0}$ sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on obtiendra alors les valeurs de vérité de $P(O_{10},..,O_{n0})$ en utilisant les tables de vérité classiques.

On dira que toute proposition mathématique simple s'exprimant sous la forme de k propositions mathématiques simples irréductibles au sens strict et indépendantes entre elles et du seul concept primitif « et » est *irréductible au sens large).* De plus par définition toute proposition mathématique simple irréductible au sens strict est *irréductible au sens large*. On pourra aussi utiliser les concepts primitifs relationnels et_G, si_G…$alors_G$, Non_G, ou_G..définis et utilisés de façon analogue à et, Non, ou.. mais avec « $Non_G(P(O_1,..,O_n)$ est vraie » est équivalent (au sens entrainement mutuel) à « $P(O_1,..,O_n)$ n'est pas vraie »… (et_G, ou_G définis de façon analogue). On aura alors « « $Non_G(O_1,..,O_n)$ est vraie » ou(exclusif) « $P(O_1,..,O_n)$ est vraie » ». Dans ce qui précède on a considéré seulement des propositions mathématiques simples $P(O_1,..,O_n)$ n'utilisant aucun concept primitif du type et_G, ou_G, Non_G…

On aura la règle suivante fondamentale dans une proposition mathématique simple concernant les propositions auxiliaires :

b)REGLES DES PROPOSITIONS AUXILIAIRES INDEPENDANTES.

Si une proposition ou une définition mathématique simple utilise des propositions auxiliaires P1 et P2 et des concepts primitifs relationnels parmi « et », « ou », « si..,alors », « est équivalent à », et_G, ou_G etc.. pour la définir elle-même ou pour définir une autre proposition auxiliaire, alors P1 et P2 seront nécessairement indépendantes, sauf dans le cas d'une proposition auxilaire obtenue du type « Si x_1 est tel que $D_1(x_1,.,),.., x_n$ est tel que $D_n(x_n,.)$, alors $P(x_1,.,x_n,..)$ » .

B)DEFINITIONS AUXILIAIRES IRREDUCTIBLES

Considérons une proposition mathématique simple irréductible $P(O_1,..,O_n)$, supposons que $I_1,..,I_k$ sont les nouveaux symboles associés à des définitions internes de niveau 0 qu'elle contient. Le fait que $P(O_1,..,O_n)$ soit vraie ou ne soit pas vraie est complètement déterminé par les objets mathématiques pouvant être représentés par $I_1,.,I_k$, ces derniers étant déterminés par les définitions auxiliaires contenues par $P(O_1,..,O_n)$. Celles-ci déterminent aussi si $I_1,.,I_k$ sont des concepts particuliers non-flous.

On admettra que par définition d'une proposition vraie si $P(O_1,..,O_n)$ est une proposition irréductible vraie alors $I_1,.,I_k$ sont nécessairement des concepts particuliers non-flous.

Supposons que l'un des I_j, noté B, soit un symbole associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{auxB}(o_b, F_{B1},..,F_{Bp(B)})$, $I_{B1},..,I_{Bk(B)}$ étant les symboles associés à des définitions auxiliaires de niveau 1 internes à $D_{auxB}(o_b, F_{B1},..,F_{Bp(B)})$. Alors comme dans le cas précédent si $F_{B10},.,F_{Bp(B)0}$ et O_0 sont des un objets mathématiques et si $D_{auxB}(O_0, F_{B10},..,F_{Bp(B)0})$ est une proposition irréductible vraie, alors dans $D_{auxB}(O_0, F_{B10},..,F_{Bp(B)0})$ $I_{B1},..,I_{Bk(B)}$ sont nécessairement des concepts particuliers non-flous. De plus si $D_{auxB}(O_0, F_{B10},..,F_{Bp(B)0})$ est une proposition irréductible on dira que $D_{auxB}(o_b, F_{B1},..,F_{Bp(B)})$ est *une définition auxiliaire irréductible.*

On généralise la définition précédente au cas de n'importe lequel nouveau symbole G_m associé à une *définition auxiliaire irréductible* de niveau nv(m) contenue dans $P(O_1,.,O_n)$ notée $D_{auxm}(o_m,H_{m1},.,H_{mp(m)})$ et contenant les définitions au sens large des symboles $I_{m1},..,I_{mk(m)}$ associés à des définitions auxiliaires de niveau nv(m)+1 internes à $D_{auxm}(o_m,H_{m1},.,H_{mp(m)})$.

REMARQUE :

On peut montrer facilement par récurrence à l'aide des définitions précédentes que si $P(O_1,.,O_n)$ est une proposition mathématique simple irréductible contenant les nouveaux symboles $G_1,.,G_m$, tous associés à des définitions auxiliaires irréductibles, alors $G_1,..,G_m$ sont nécessairement des concepts particuliers non-flous.

Par souci de simplicité, on considèrera en général seulement des définitions mathématiques simples et des propositions mathématiques simples irréductibles vraies dont toute les définitions auxiliaires sont irréductibles.

C)ORDINATION DES DEFINITIONS AUXILIAIRES

On peut ordonner les définitions auxiliaires dans une définition ou une proposition mathématique simple selon leur ordre d'apparition. D'après les définitions des définitions auxiliaires, les symboles particuliers au sens large pouvant être utilisés à l'emplacement d'une définition auxiliaire $D_{auxm}(o_m,\ldots)$ seront associés à des définitions auxilaires dont le numéro d'ordre d'apparition précède le numéro d'ordre d'apparition de $D_{auxm}(o_m,..)$. On pourra utiliser ces numéros d'ordre pour démontrer par récurrence ds propriétés des définitions auxiliaires.

Afin de pouvoir obtenir facilement les symboles particuliers au sens large pouvant être utilisés à l'emplacement d'une définition auxiliaire, on pourra repérer chaque définition auxilaire par une séquence finie de naturels définie comme suit :

A la définition auxiliaire de niveau 0 apparaissant la première on attribuera la séquence finie (0,1). A la définition auxilaire de niveau 0 qui est la ième par ordre d'apparition on attribuera la séquence finie (0,i).

Supposons qu'on ait attribué à chaque définition auxiliaire de niveau m une séquence de type $(m,n_1,.,n_{m+1})$. Alors on attribuera à chaque définition auxiliaire de niveau m+1 une séquence finie $(m+1,n_1,..,n_{m+2})$ si cette définition auxilaire est interne à la définition auxiliaire de niveau m repérée par la séquence $(m,n_2,\ldots,n_{m+2})$ qui est la n1ième par ordre d'apparition.

Nous pouvons maintenant proposer l'Axiome simple et fondamental suivant :

AXIOME 2.5A :

Toute proposition mathématique simple est non-floue. (Ce qui entraîne immédiatement :Toute définition mathématique simple est non-floue.)

JUSTIFICATION DE L'AXIOME 2.5A-AXIOME 2.5AI :

On peut justifier l'Axiome 2 .5A de la façon suivante :
D_{auxIm} $(o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$ étant une définition auxiliaire, on dira qu'elles est *non-floue au sens large* si pour tout $O_{10},\ldots,O_{r+t+10}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on a $D_{auxIm}(O_{10},\ldots,O_{r+t+10})$ est non-floue c'est-à-dire est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. On admet alors l'AXIOME 2.5AI :

« $P(O_{10},..,O_{n+10})$ étant une proposition mathématique simple, $O_{10},..,O_{n+10}$ étant des objets mathématiques non-relationnels (identifiant O_{i0} avec le concept particulier non-flou pouvant représenter seulement O_{i0}), alors si $P(O_{10},..,O_{n+10})$ ne contient aucune définition auxilaire ou si toutes les définitions auxilaires internes à $P(O_{10},..,O_{n+10})$ (donc de niveau 0) sont des définitions non-floues au sens large, alors $P(O_{10},..,O_{n+10})$ est vraie ou(exclusif n'est pas vraie ».

$D(o,O_1,..,O_n)$ étant une définition mathématique simple, $O_{10},.,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$ et O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, on considère la proposition mathématique simple $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$. Dans cette proposition, on considère les définitions auxiliaires ne contenant pas de définitions auxilaires, et soit M le niveau maximal des définitions auxilaires considérées. Soit D_{auxIM} $(o_M, C_1,..,C_p)$ une définition auxiliaire de niveau maximal M et donc ne contenant pas de définitions auxiliaires internes. Si M=0, d'après l'Axiome 2.5AI, $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. Si M>0, C_0, $C_{10},..,C_{p0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on peut idendifier $D_{auxM}(C_0,..,C_{p0})$ avec

une proposition mathématique simple ne contenant aucune définition auxiliaire interne et donc d'après l'Axiome 2.5AI, D_{auxIM} (C_0,.,C_{p0}) est non-floue et donc D_{auxM}(o_M,C_1,..,C_p) est non-floue au sens large. D_{auxM-1}(o_{M-1},D_1,..,D_r) étant une définition auxiliaire de niveau M-1, D_0,D_{10},..,D_{r0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on peut identifier D_{auxM-1}(D_0,..,D_{r0}) avec une proposition mathématique simple ne contenant aucune définition auxiliaire interne ou avec une proposition mathématique simple dont toutes les définitions internes de niveau 0 sont non-floues au sens large et donc d'après l'Axiome 2.5AI D_{auxM-1}(D_0,.,D_{r0}) est non-floue et donc D_{auxM-1}(o_{M-1},D_1,..,D_r) est non-floue au sens large. On montre de la même façon par une récurrence inversée que toutes les définition auxiliaires de D(O_0,O_{10},..,O_{n0}) sont non-floues au sens large. Appliquant ce résultat aux définitions auxiliaires de niveau 0 de D(O_0,O_{10},.,O_{n0}) on obtient d'après l'Axiome 2.5AI que D(O_0,O_{10},..,O_{n0}) est non-floue, et il en résulte D(o,O_1,.,O_n) est non-floue. On montre de la même façon qu'une proposition mathématique simple P(O_1,..,O_n) est non-floue.

On aurait donc pu admettre l'Axiome 2.5AI et obtenir l'Axiome 2.5A comme Théorème.

Une définition auxiliaire est donc définie par son expression et par les définitions auxiliaires qu'elle contient. Considérons par exemple un symbole particulier C_m associé à une définition auxiliaire D_{auxIm} (o_m, D_1,.,D_p). Soit M le niveau maximal des définitions auxiliares qu'elle contient. Pour définir D_{auxIm} (o_m, D_1,.,D_p), on définit pour tous D_0,D_{10},..,D_{p0} objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP D_{auxm}(D_0, D_{10},..,D_{p0}). Pour cela on commence par définir pour toute définition auxiliaire de niveau M D_{auxM}(o_M,E_1,..,E_r) qu'elle contient (qui ne contiennent pas de définitions auxiliaires internes), pour tous E_0,E_{10},..,E_{r0} objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP D_{auxM}(E_0,E_{10},..,E_{r0}). Puis par une récurrence inversée, pour toute définition auxiliaire D_{auxi}(o_i, F_1,..,F_s) contenue dans D_{auxm}(o_m,D_1,..,D_p), pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP F_0,F_{10},..,F_{s0} on définit D_{auxi}(F_0,F_{10},..,F_{s0}), et enfin pour tous D_0,D_{10},.,D_{p0} objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP D_{auxm}(D_0,..,D_{p0}). On peut alors grâce à ces définitions définir complètement C_m et tous les nouveaux symboles particuliers définis dans D_{auxm}(o_m,D_1,..,D_p).

REMARQUE 2.5B :

a) L'intérêt d'exprimer une définition ou une proposition sous la forme d'une définition mathématique simple primitive ou d'une proposition mathématique simple primitive telles que définies en 2.5IA et en 2.5IIA est d'une part parceque cela permet de justifier qu'elles sont non-floues en utilisant l'Axiome 2.5A, mais aussi parceque cela permet de mettre en évidence explicitement tous les symboles particuliers non-flous qu'elles utilisent et plus généralement d'obtenir leur interprétation dand la TMP. C'est pourquoi on a appelé ces dernières *interprétation Platoniste*.

b)p étant un naturel supérieur ou égal à 2, on emploiera la notation D((o_1,..,o_p), O_1,..,O_n), ou D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n), utilisant les symboles particuliers non-flous pré-définis O_1,..,O_n et telle que pour tous O_{10},.,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n, pour tous objets mathématiques C_{10},.,C_{p0}, si D(C_{10},..,C_{p0},O_{10},…,O_{n0}) est vraie, (C_{10},..,C_{p0}) est nécessairement une séquence finie à p termes ,c'est-à-dire comme on le verra plus loin, C_{10},..,C_{p0} sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

Par définition, D((o_1,..,o_p), O_1,..,O_n), sera une *définition mathématique simple* si elle utilise les mêmes termes que peut utiliser une définition mathématique simple D(o, O_1,..,O_n), remplaçant « o » par « o_1,..,o_p ». On dira alors que D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n) est *une définition mathématique simple séquentielle.*

O_{10},..,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n et C_{10},..,C_{p0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on peut identifier D(C_{10},..,C_{p0}, O_{10},..,O_{n0}) à une proposition mathématique simple utilisant les concepts particuliers pré-définis C_{10},..,C_{p0}, O_{10},..,O_{n0} (avec pour i parmi 1,..,p C_{i0} identifié avec le concept particulier non-flou pouvant reprsenter seulement C_{i0} et de même pour O_{j0}). Et donc on aura toujours D(C_{10},..,C_{p0}, O_{10},..,O_{n0}) est vraie ou n'est pas vraie d'après l'Axiome 2.5A. On dira que D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n) est *non-floue.*
On pourra donc utiliser une proposition de la forme :
« (C_1,..,C_p) est le symbole particulier associé à D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n) »

Par définition $(C_1,.,C_p)$ et $C_1,.,C_p$ seront des concepts particuliers non-flous si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, il existe $C_{10},..,C_{p0}$ tels que à $D(C_{10},..,C_{p0}, O_{10},..,O_{n0})$ est vraie. Si tel n'est pas le cas, par définition, pour tous $O_{10},.,O_{n0}$ représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, $(C_1,..,C_p)$, $C_1,..,C_p$ ne pourront représenter aucun objet mathématique.

On peut de même généraliser la définition d'une définition auxiliaire de niveau m, en définissant une définition auxiliaire séquentielle de niveau m de type :
D_{auxIm} $(o_{m1},..,o_{mp}, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$.

On peut aussi généraliser la définition donnée en 2.5 en définissant un symbole particulier $(C_{m1},..,C_{mp})$ *implicitement* ou *explicitement* associé à une définition auxiliaire séquentielle D_{auxIm} $(o_{m1},\dots,o_{mp}, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$.

Cependant, il sera toujours possible d'éviter l'utilisation d'une définition mathématique simple séquentielle ou une définition auxiliaire séquentielle. En effet, considérons par exemple une définition mathématique simple séquentielle $D_1(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$.
Supposons qu'on ait défini $(C_1,..,C_p)$ par la proposition :
« $(C_1,.,C_p)$ est le symbole particulier associé à $D_1(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$ ».
Considérons alors la définition $D_2(o, O_1,..,O_n)$: «o est une séquenceà p termes (p étant identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel), et si F_1 est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire $D_{auxF1}(o_{F1},o)$: « o_{F1} est le 1[ier] terme de o »,..,F_p est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire $D_{auxFp}(o_{Fp},o)$: « o_{Fp} est le pième teme de o », $D_1(F_1,..,F_p, O_1,..,O_n)$ ».
Le fait que à $D_1(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$ soit une définition mathématique simple entraîne que à $D_2(o, O_1,..,O_n)$ est une définition mathématique simple. (On montrera et on admettra dès maintenant que i étant identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel différent de 0, « est le ième terme » est une relation non-floue).

On définit alors successivement les symboles particuliers non-flous $G,G_1,..,G_p$ par :
G est le symbole particulier non-flou associé à à $D_2(o, O_1,..,O_n)$.
G_1 est le symbole particulier non-flou associé à $D_{G1}(o_{G1},G)$: « o_{G1} est le 1[ier] terme de G »
…
G_p est le symbole particulier non-flou associé à $D_{Gp}(o_{Gp},G)$: « o_{Gp} est l pième terme de G »

On obtient alors immédiatement que « $(G_1,..,G_p)$ $G_1,..,G_p$ sont des concept particuliers non-flous » est équivalent à « $(C_1,..,C_p)$,$C_1,..,C_p$ sont des concepts particuliers non-flous » et «$C_{10},..,C_{p0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, « $(C_1,.,C_p)$ peut représenter $(C_{10},.,C_{p0})$ » est équivalent à « $(G_1,..,G_p)$ peut représenter $(C_{10},..,C_{p0})$ ».

Dans ce qui précède concernant les définitions mathématiques simples séquentielles on a utilisé des séquences finies qu'on ne pourra définir (classiquement) qu'après la définition de **N** (sauf pour des couples qu'on a déjà définis). Et donc nous n'utiliserons pas dans cet article de définition mathématique simple séquentielle avant la définition formelle des séquences finies.

c)L'Axiome 2.5A est fondamental dans la TMP, car on verra qu'il permet de prouver l'existence d'ensembles, et aussi de définir des concepts particuliers et généraux non-flous. Dans un 2[nd] article, on montrera cependant qu'il est possible de montrer formellement qu'une définition mathématique simple ou une proposition mathématique simple est non-floue sans utiliser l'Axiome 2.5A. On montrera aussi qu'une proposition mathématique simple a une *signification Platoniste* formelle, différente et plus simple que son interprétation Platoniste. On pourra montrer qu'une proposition mathématique simple est vraie ou n'est pas vraie en utilisant de déductions logiques relationnelles. D'après l'Axiome 2.5A, on ne pourra jamais, utilisant des Axiomes de la TMP qui sont vrais, obtenir qu'une proposition mathématique simple est vraie et n'est pas vraie, ou n'est ni vraie ni non-vraie.

d)On remarque qu'on ne peut pas utiliser « une relation non-floue » ou « une définition non-floue » dans une définition ou une proposition mathématique simple.

e)Si on a la proposition P : «Si x est tel que Non(x est un ensemble), alors x est un couple » alors P ne sera pas une proposition mathématique simple puisque x peut représenter des objets mathématiques

relationnels. Cependant, on verra que P est une proposition mathématique mixte, qui est évidemment fausse.

Si on a la proposition P1 : « Si x est tel que x est un ensemble alors x n'est pas un couple », d'après la signification du concept primitif « tel que », P1 définit le symbole particulier x pouvant représenter les mêmes objets que x dans la définition Def(x) : « x est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire $D_{auxx}(o)$: « o est un ensemble ».

f)On peut généraliser la définition de proposition ou de définition mathématiques simples en définissant des *propositions mathématiques mixtes* et des *définitions mathématiques mixtes*. Celles-ci peuvent utiliser des concepts particuliers et généraux non-flous mixtes, c'est-à-dire pouvant représenter tout type d'objets mathématiques. On généralise alors l'Axiome 2.5A :
-Toute proposition mathématique mixte est non-floue.
-Toute définition mathématique mixte est non-floue.

g)On peut montrer que dans une proposition mathématique simple, tout nouveau symbole associé à une définition auxiliaire est un symbole particulier non-flou. Pour cela on procède par récurrence :

On conserve les notations du 2.5IIIB, pour i parmi 1,..,q, H_i est un symbole particulier associé à la définition auxiliaire $D_{auxHi}(o_{Hi}, H_{i1},..,H_{ip(i)})$, $H_{i1},..,H_{ip(i)}$ étant des symboles particuliers prédéfinis au sens large avant H_i.Alors :

-Si l'un des H_{ij} est un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou, alors H_i est un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique.

-Si tous les H_{ij} sont des concepts particuliers non-flous, alors on peut identifier $D_{auxHi}(o_{Hi}, H_{i1},..,H_{ip(i)})$ avec une définition mathématique simple qui est non-floue d'après l'Axiome 2.5A, et donc H_i est un symbole particulier non-flou.

h)Si C_i est un symbole particulier associé à une définition auxiliaire dans une proposition mathématique simple $P(O_1,..,O_n)$, alors on dira que C_i est *défini uniquement en fonction* de $O_1,.,O_n$, si on a toujours $O_1,..,O_n$ représentant simultanément $O_{10},..,O_{n0}$, C_i peut représenter un unique objet mathématique.

i)Considérons une proposition mathématique simple $P(O_1,..,O_n)$. $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, on définit les concepts généraux non-flous $O_{10G},..,O_{n0G}$, avec pour j parmi 1,.,n O_{j0G} peut représenter seulement O_{j0}. On suppose qu'on a montré qu'on a toujours $P(O_{10G},..,O_{n0G})$ est vraie. Alors il est évident qu'on aura $P(O_1,..,O_n)$ est vraie.

j)On admettra que d'après la définition d'une proposition mathématique simple, si dans une proposition mathématique simple une proposition auxiliaire P_{aux1} contient une partie d'une proposition auxiliaire P_{aux2}, alors ou bien P_{aux1} contient strictement P_{aux2}, ou bien P_{aux2} contient strictement P_{aux1}, ou bien P_{aux1} est identique à P_{aux2}.

REMARQUE 2.5C :

a)Dans une définition mathématique simple d'après l'Axiome 2.5A, on peut donc utiliser des concepts généraux non-flous (Par exemple comme on le verra **N**, **Q**…).

b)O_1 et O_2 étant des symboles particuliers non-flous prédéfinis, on peut dans une définition mathématique simple utiliser (O_1,O_2), symbole particulier non-flou associé à la définition $D(o,O_1,O_2)$: « o est un couple et O_1 est le premier terme de o et O_2 est le 2ième terme de o ». (Ceci constitue une règle syntaxique de convention (symbolique)).

En effet, la définition précédente est non-floue d'après l'Axiome 2.5A.

c)On remarque que pour définir « un ensemble » ou « un couple » on n'a pas utilisé de définition générale non-floue D(o) associée à ces concepts mais des axiomes. Ceci est peu fréquent, mais c'est le

cas pour les concepts généraux fondements de la TMP. On a appelé *Définition axiomatique* (partielle) de telles définitions sous forme d'Axiomes.

REMARQUE 2.5D.

a)Dans la TMP comme dans les mathématiques classiques, un *Axiome* est une proposition qu'on admet à cause de son caractère d'évidence, et qui permet d'obtenir des propositions vraies appliquant l'Axiome 2.2.E.

b)On distingue 3 sortes d'Axiomes, les *Axiomes mathématiques simples* qui sont des propositions mathématiques simples (définies dans la Définition 2.5), les *Axiomes mathématiques mixtes* dont font partie les Axiomes mathématiques simples et qui sont des propositions mathématiques mixtes, et enfin les *Axiomes para-mathématiques* qui sont des propositions para-mathématiques, pouvant utiliser les termes , « un concept général non-flou », « un concept particulier non-flou », « une proposition mathématique simple ».….Par exemple l'Axiome 2.5A est un Axiome para-mathématique.

c)On remarque que d'après l'Axiome 2.5A, les définitions $D_C(o)$: « o est un ensemble » et $D_R(o)$: « o est un ensemble et Non(o est élément de o) » sont des définitions non-floues. Elles seront utilisées pour étudier dans la TMP les paradoxes de Cantor et de Russel.

Supposons qu'on considère des objets mathématiques correspondant à une définition générale non-floue D(o). On cherche à savoir s'il existe un ensemble A dont les éléments correspondent à la définition D(o). On a la définition suivante d'un tel ensemble :

DEFINITION 2.6 :

D(o) étant une définition générale mathématique simple , on dira qu'A *est un ensemble dont les éléments correspondent* à D(o) si A est défini par la proposition mathématique simple vraie D_A :
D_A: A est tel que « A est un ensemble et pour tout a tel que « a est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP », « D(a) est équivalent à a est élément de A » ».

D_A est une proposition mathématique simple d'après la Définition 2.5, elle est donc non-floue. De plus on a vu que si D_A est vraie, A est nécessairement un concept particulier non-flou car D_A est irréductible.

Par convention on écrira D_A sous la forme équivalente :
D'_A :A est tel que « A={a tel que D(a)} ».

Une proposition mathématique simple ou une définition mathématique simple pourra utiliser une expression du type D_A ou D'_A pour définir un ensemble.

REMARQUE 2.7 :

On remarque que d'après l'Axiome 2.2.B, si 2 ensembles ont les mêmes éléments ils sont identiques. Il en résulte que si A est un ensemble dont les éléments correspondent à une définition mathématique simple D(o) alors A représente un unique ensemble.

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition générale D(o) non-floue, c'est-à-dire binaire et cohérente, on pourrait s'attendre à ce qu'il existe un ensemble dont les éléments correspondent à D(o). Ceci équivaudrait à admettre l'Axiome suivant, que nous appellerons « Axiome Naïf » :

AXIOME NAIF 2.8:

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition D(o) non-floue, alors il existe un ensemble dont les éléments correspondent à la définition D(o).

PARADOXES DE CANTOR ET DE RUSSEL 2.9 :

Or l' Axiome naif est faux. On l'a appelé « Axiome Naïf » car il conduit aux mêmes paradoxes que la Théorie naïve des ensembles.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor à partir de l'Axiome naïf 2.8 :

Supposons qu'on considère les objets mathématiques correspondants à la définition $D_C(o)$ « o est un ensemble ». On a vu que d'après l'Axiome 2.5A, $D_C(o)$ est non-floue c'est à dire $D_C(o)$ est binaire et cohérente. Cependant si l'Axiome naïf 2.8 est vrai, alors il existe un ensemble non-flou A_C dont les éléments correspondent à $D_C(o)$, alors admettant que tout sous-ensemble de A_C est un ensemble existant (Ce qui est obligatoire si le concept « ensemble » a les propriétés des ensembles classiques), A_C admet comme élément chacun de ses sous-ensembles, et ceci est impossible car on est dans un cas analogue au Paradoxe de Cantor.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Russel :

Considérons les objets correspondants à la Définition $D_R(o)$« o est un ensemble et Non(« o est un élément de o ») ». On a vu que $D_R(o)$ était non-floue d'après l'Axiome 2.5A c'est à dire $D_R(o)$ est binaire et cohérente. Supposons que l'Axiome naïf 2.8 soit vrai. Alors il existe un ensemble A_R non-flou dont les éléments correspondent à $D_R(o)$.

A_R ne peut représenter qu'un unique ensemble d'après la Remarque 2.7.b).

Si « A_R est élément de A_R » est vraie, alors A_R ne correspond pas à $D_R(o)$, et donc A_R n'est pas élément de A_R, il est donc impossible qu'on ait « A_R est élément de A_R » est vraie puisque la relation « est élément de A_R » est cohérente (Remarque 2.2 E)

Si on a Non(« A_R est élément de A_R » est vraie), alors A_R correspond à $D_R(o)$ et donc « A_R est élément de A_R », ce qui est impossible puisque la définition « o est élément de A_R » est cohérente. Il est donc impossible qu'on ait Non(« A_R est élément de A_R » est vraie).

Or ceci est impossible puisque la relation « est élément de » est binaire , et donc on a ou bien « A_R est élément de A_R » est vraie, ou bien Non(« A_R est élément de A_R » est vraie).

On recherche donc un Axiome de la TMP permettant d'obtenir l'existence d'un ensemble non-flou A dont les éléments correspondent à une définition D(o). On a vu dans la Remarque 2.7b) que A ne peut représenter qu'un unique ensemble.

Supposons que la définition générale D(o) soit non-floue, et que tout objet mathématique correspondant à D(o) soit élément d'un ensemble E. Puisque D(o) est binaire et cohérente, il semble intuitivement certain qu' il existe un sous-ensemble de E dont les éléments correspondent à D(o), ce qu'on admettra axiomatiquement. On introduit donc la définition suivante :

DEFINITION 2.10 :

Si on a une définition générale mathématique simple D(o) telle qu'il existe un ensemble B_0 tel que tout objet O_0 correspondant à D(o) soit élément de B_0 , alors on dira que D(o) est *basique*.

DEFINITION 2.11A:

a)CONCEPTS PARTICULIERS SANS PARAMETRES FIXES

$O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous définis successivement avec les notations de la Définition 2.3g, on a défini, $O_{10},..,O_{n0}$ étant des objets mathématiques la proposition « $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$». De même, k(1),.,k(s) appartenant à {1,..,n}, $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ étant des objets mathématiques, on a défini la proposition : « $O_{k(1)},\dots ,O_{k(s)}$ peuvent représenter simultanément $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ ».

Avec les notations de la Définition 2.3g, considérons un concept particulier non-flou $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ associé à une définition mathématique simple $D_t(o_t,O_{t(1)},.,O_{t(u)})$. Alors par définition,

« $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ *sans paramètre fixe* » sera un symbole tel que « $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ peut représenter O_0 » est équivalent (au sens « entrainement mutuel ») à « Il existe des objets $O_{t(1)0},..,O_{t(u)0}$ tels que $O_{t(1)},.,O_{t(u)}$ peuvent rerprésenter simultanément $O_{t(1)0},.,O_{t(u)0}$ et $O(O(O_{t(1)0},..,O_{t(u)0})$ peut représenter O_0 (c'est-à-dire $D_t(O_0,O_{t(1)0},.,O_{t(u)0})$ est vraie) ».

b)Si $O(O_1,.,O_n)$ est un concept particulier non-flou et si $O_1,..,O_n$ pouvant représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$, il existe toujours un unique objet O_0 pouvant être représenté par $O(O_{10},..,O_{n0})$, (C'est-à-dire un unique objet O_0 tel que « $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ et O_0 est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP » est vraie), alors on dira que $O(O_1,..,O_n)$ est *défini uniquement en fonction* de $O_1,..,O_n$.

On a alors le Théorème fondamental suivant :

THEOREME 2.11B

$O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous définis avec les notations de la Définition 2.3g :

a)Il existe des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$.

b)r(1),..,r(s) étant dans {1,.,n}, il existe des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_{r(1)},..,O_{r(s)}$.

c))r(1),..,r(s) étant dans {1,.,n},pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$, $O_{r(1)},.,O_{r(s)}$ peuvent représenter simultanément ou(exclusif) ne peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$.

d)$O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ étant associé à une définition mathématique simple $D_t(o_t,O_{t(1)},.,O_{t(u)})$, $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ sans paramètre fixe est un concept général non-flou.

Preuve :

On rappelle qu'avant la définition de **N** dans la TMP, on considère les indices utilisés 1,..,n non comme des naturels mais comme des signes distinctifs. De plus, s(1),..,s(p) étant des signes distinctifs, on utilse la notation « s est dans {s(1),..,s(p)} » pour « s est parmi s(1),..,s(p) ».

On définit *une démonstration par récurrence* sur des signes distinctifs de la façon suivante :

Supposons qu'on ait des signes distinctifs s(1),..,s(p) et que pour tout s(i) dans{s(1),..,s(p)} on ait défini une proposition P(s(i)) (resp.P(s(1),..,s(i))), avec P(s(1)) vraie et pour tout s(i) dans {s(1),..,s(p)} P(s(i)) (resp.P(s(1),..,s(i))) entraîne P(s(i+1)) (resp.P(s(1),..,s(i+1))) (« i+1 » étant identifié non à un naturel mais au symbole successeur du symbole i, par exemple « 2+1 » est identifié avec le symbole « 3 »). Alors on admettra que pour tout s(i) dans {s(1),..,s(p)} P(s(i)) (resp.P(s(1),..,s(i))) est vraie et on dira qu'on a démontré par récurrence sur s(1),.,s(p) les propositions P(s(1)),..,P(s(p)) ((resp. P(s(1),..,P(s(1),..,s(p))).

a)Ce point se démontre facilement par récurrence.
b)Ce point est conséquence immédiate du a).
c)On procède par récurrence :

On conserve les notations du 2.3g. On suppose qu'on a démontré P((1,..,n)) : « Pour tous r(1),..,r(s) dans {1,..,n}, pour tous objets mathématiques $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$ (On peut supposer dans la démonstration que les objets mathématiques qu'on utilise sont non-relationnels et différents de l'EMP), $O_{r(1)},.,O_{r(s)}$ peuvent représenter simultanément ou(exclusif) ne peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$ ».

On suppose que O_{n+1} est le concept particulier non-flou associé à la définition mathématique simple $D_{n+1}(o_{n+1},O_{n+1,1},.,O_{n+1,h(n+1)})$.

Pour montrer P(1,..,n+1), il est évident qu'il suffit de démontrer PA(n+1) : « Pour tous r(1),..,r(s) dans {1,..,n} et pour tous objets mathématiques $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}, $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$,O_{n+1} peuvent représenter simultanément ou (exclusif) ne peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$,O_{n+10} ».
PA(n+1) est équivalent à PB(n+1) : « Pour tous r(1),..,r(s) dans {1,..,n} et pour tous objets mathématiques $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}, $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$,O_{n+1}, si QA($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) est la proposition : « $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$,O_{n+1} peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$,O_{n+10} », QA($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. »

On peut supposer que $O_{n+1,1}$,..,O_{n+1j} sont parmi $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$ et $O_{n+1,j+1}$,..,$O_{n+1,h(n+1)}$ ne sont pas parmi $O_{r(1)}$,.,$O_{r(s)}$. Alors, d'après la Définition 2.3g, QA($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) est équivalent à la proposition QB($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) : « $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$ peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,…,$O_{r(s)0}$ et RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, ,O_{n+10}) : « Il existe des objets mathématiques $O_{n+1,j+10}$,..,$O_{n+1,h(n+1)0}$ tels que $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$, $O_{n+1,j+1}$,..,$O_{n+1,h(n+1)}$ peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,..,$O_{n+1,h(n+1)0}$ et D_{n+1}(O_{n+10},$O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,h(n+1)0}$) ».

Pour montrer que RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie, il suffit de montrer que la négation de RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou exclusif n'est pas vraie, c'est-à-dire RB($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie, avec :
RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) : « Pour tous objets mathématiques $O_{n+1,j0}$,..,$O_{n+1,h(n+1)0}$, si $O_{r(1)}$,...,$O_{n+1,h(n+1)}$ peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,..,$O_{n+1,h(n+1)0}$, alors Non (D_{n+1}(O_{n+10},$O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1h(n+1)0}$)) »
En utilisant l'hypothèse de récurrence, le fait que D_{n+1}(o_{n+1},$O_{n+1,1}$,..,$O_{n+1h(n+1)}$) soit non-floue et la signification des concepts primitifs « Pour tous » et « si..alors » on obtient que RB($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. Et donc RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient donc QB($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, de même que QA($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}).

D'après la signification des concepts primtifs « Pour tous » et « si.. alors », on obtient PB(n+1) est vraie, et donc P(1,..,n+1) est vraie.

d)Pour montrer ce point, on doit montrer, avec les notations du Théorème :

(i)Il existe un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP pouvant être représenté par O(O($O_{t(1)}$,..,$O_{t(u)}$) sans paramètre fixe.

(ii)P :Pour tout objet mathématique O_0, (On rappelle qu'on peut supposer que les objets mathématiques qu'on utilise sont non-relationnels et différents de l'EMP), O(O($O_{t(1)}$,..,$O_{t(u)}$) sans paramètre fixe peut représenter ou(exclusif) ne peut pas représenter O_0.

Le (i) est une conséquence immédiate du b).

On remarque que P est équivalent à Q : « Pour tout objet mathématique O_0, si R(O_0) est la proposition : « Il existe des objets mathématiques $O_{t(1)0}$,..,$O_{t(u)0}$ tels que $O_{t(1)}$,..,$O_{t(n)}$ peuvent représenter simultanément $O_{t(1)0}$,..,$O_{t(u)0}$ et D_t(O_0,$O_{t(1)0}$,…$O_{t(u)0}$)) », alors R(O_0) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie ».

Pour montrer que R(O_0) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, il suffit de démontrer que la négation de R(O_0) notée S(O_0) (avec R(O_0) est vraie est équivalent à S(O_0) n'est pas vraie) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, avec :
S(O_0) : « Pour tous objets mathématiques $O_{t(1)0}$,..,$O_{t(u)0}$, si $O_{t(1)}$,.,$O_{t(u)}$ peuvent représenter simultanément $O_{t(1)0}$,..,$O_{t(u)0}$, alors Non(D_t(O_0,$O_{t(1)0}$,..,$O_{t(u)0}$).

En utilisant le c), le fait que D_t(o_t,$O_{t(1)}$,.,$O_{t(u)}$), O(O($O_{t(1)}$,..,$O_{t(u)}$) soit non-floue et la signification des concepts primitifs « Pour tout » et « si..alors », on obtient que S(O_0) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, et de même pour R(O_0). Il en résute que P est vraie, on a donc montré la proposition.

REMARQUE 2.11C :

On a déjà vu 2 façons de définir un concept général non-flou :

-La première possibilité est de le définir par des définitions axiomatiques partielles, en général équivalentes à des propositions mathématiques simples ce qui est presque seulement utilisé pour définir les concepts généraux des fondations des mathématiques (un ensemble, l'EMP, une relation floue, un couple…)

-La 2ième possibilité est de le définir en l'associant à une définition générale (c'est-à-dire n'utilisant pas de concepts particuliers pré-définis) non-floue D(o).

-Il existe une 3ième possibilité :

Supposons qu'on ait défini un concept particulier non-flou $O(O_1,..,O_n)$. D'après le Théorème précédent, $O(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes est un concept général non-flou.

DEFINITION 2.12A : (FONCTION CONCEPT)

Soit $O_A(O_1,..,O_n)$ un concept particulier non-flou associé à une définition $D_A(o,O_1, .,O_n)$, $O_1,.,O_n$ étant des concepts particulier non-flous avec $O_A(O_1,…,O_n)$ *défini uniquement en fonction* de $O_1,..,O_n$.

On a déjà établi que pour n=2, (O_1,O_2) est un concept paticulier non-flou. On a vu aussi dans Préambule de la Définition 2.2A que pour n>2 on montrerait aussi, après avoir défini les naturels dans la TMP, l'existence du concept particulier non-flou non-flou $(O_1,.,O_n)$ identifié avec $\{(1,O_1),..,(n,O_n)\}$et défini uniquement en fonction de $O_1,.,O_n$.

Ceci permettra de justifier que pour n>1, $(O_1,..,O_n)$ est un concept particulier non-flou de même que $(O_A(O_1,..,O_n)), (O_1,…,O_n))$.

D'après le Théorème 2.11Bd il existe concept général non-flou noté F_A pouvant représenter les mêmes séquences que $(O_A(O_1,..,O_n)), (O_1,…,O_n))$ sans paramètres fixes. De même il existe un concept général non-flou noté $Dep(F_A)$ pouvant représenter les mêmes séquences que $(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes. Ceci signifie donc (si n>1) que $Dep(F_A)$ peut représenter toutes les séquences $(O_{10},…,O_{n0})$ telles que $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$. F_A peut alors représenter tous les couples $(O(O_{10},…,O_{n0}), (O_{10},…,O_{n0}))$.

On dira que F_A est une *fonction-concept définie sur* $Dep(F_A)$ et que $Dep(F_A)$ est le *concept de départ* de F_A.

Si $(O_{10},…,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_1,..,O_n)$sans paramètres fixes, d'après une règle syntaxique de convention symbolique on identifiera alors $F_A(O_{10},..,O_{n0})$ avec $O_A(O_{10},..,O_{n0})$.

Plus généralement, on pourra identifier avec une fonction-concept F_A tout concept général non-flou ne pouvant représenter que des couples, et tel que O_{A10},O_{A20},O_{B0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, si (O_{A10},O_{B0}) et (O_{A20},O_{B0}) appartiennent à F_A, alors O_{A10} est identique à O_{A20}.

On verra que par exemple les symboles « U », « *P* » pourront être identifiés à des fonctions-concepts. Dans cet article, avant la définition de **N**, si on définit une fonction-concept dont le concept de départ peut représenter seulement des séquences finies à n termes, on aura au maximum n=2

F_A étant une fonction-concept définie avec les notations précédentes, on pourra utiliser dans une définition ou une proposition mathématique simple $F_A(O'_1,..,O'_n)$ avec $O'_1,..,O'_n$ concepts généraux pouvant représenter un unique objet ou symboles particuliers non flous ou de type $o_{r1},..,o_{rs}$ pouvant dans tous les cas être utilisés à l'emplacement de $F_A(O'_1,..,O'_n)$, $F_A(O'_1,..,O'_n)$ étant identifié d'après une règle syntaxique de convention symbolique avec un symbole particulier non-flou associé à la définition auxiliaire $D_{auxFA}(o_c,O'_1,..,O'_n)$: « $(O'_1,..,O'_n)$ appartient au concept général $Dep(F_A)$ et $(o_c,(O'_1,..,O'_n))$ appartient au concept général F_A ». On dira que $F_A(O'_1,..,O'_n)$ est *implicitement associé au sens d'une fonction-concept* à la définition auxiliaire $D_{auxFA}(o_c,O'_1,..,O'_n)$.

Plus généralement d'après une 2ième règle syntaxique de convention symbolique, une expression du type précédent $F_A(O'_1,..,O'_n)$ pourra aussi utiliser des O'_j identifiés à des symboles

particuliers non-flous pouvant être utilisés à son emplacement, et donc en particulier du type $F_{Aj}(O'_{j1},..,O'_{jk(j)})$.

Si $E(O'_1,..,O'_n)$ est l'expression $F_A(F_{A1}(O'_{11},..,O'_{1k(1)}),..,F_{Ap}(O'_{p1},.,O'_{pk(p)})$, avec $F_A,F_{A1},.,F_{Ap}$ fonction-concepts et les O'_{ij} parmi $O'_1,.,O'_n$, alors on identifiera $E(O'_1,.,O'_n)$ avec un symbole particulier non-flou obtenu par des définitions auxiliaires implicites au sens d'une fonction-concept (analogues aux D_{auxFA} précédentes) d' expressions du type $F_{A1}(..),…,F_{Ap}(..),F_A(..)$. On dira que $E(O'_1,.,O'_n)$ est *implicitement défini par les définitions auxiliaires implicites au sens d'une fonction-concept* de $F_{A1}(..),..,F_A(..)$.

On pourra aussi définir des *notations-concepts* qui sont des symboles qui par convention sont identifiés avec des concepts particuliers non-flous déterminés. Par exemple la proposition P :« L(x,x') est un Lagrangien » aura la même signification que 2 définitions mathématiques simples classiques définissant les concepts particuliers non-flous x et L(x,x'). x et L(x,x') seront alors considérés comme des notations-concepts définis par P.

DEFINITION 2.12 B :

On dira que A est un ensemble *dont les éléments correspondent à la* définition mathématique simple $D(o,O_1,..,O_n)$ de paramètres fixes les concepts particuliers non-flous $O_1,..,O_n$ si A est défini par la proposition mathématique simple :

$D_A(O_1,…,O_n)$: « A (noté aussi $A(O_1,…,O_n)$) est tel que « A est un ensemble et pour tout x tel que x est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP, «x est élément de A est équivalent à x est tel que $D(x,O_1,…,O_n)$)» ».

Par convention, on écrira $D_A(O_1,…,O_n)$ sous la forme suivante, ayant la même signification:
$D'_A(O_1,…,O_n)$: « A est tel que « A={x tel que $D(x,O_1,..,O_n)$} » ».

On dira alors si $D_A(O_1,…,O_n)$ est vraie que pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, $A(O_{10},…,O_{n0})$ est un ensemble dont les éléments correspondent à $D(o,O_{10},…,O_{n0})$.

D'après les règles de ponctuation d'une proposition mathématique simple, on admettra par convention qu'une proposition auxiliaire du type « A={x tel que $D(x,O_1,..,O_n)$} » entourée de guillemets a la même signification que non-entourée de guillemets. Il en sera de même pour une proposition auxiliaire du type « A={$x_1,..,x_k$} » qui aura par convention la même signification que « A={x tel que « x=$x_1$ou..ou x=x_k} ».

D'après la définition 2.5 $D_A(O_1,…,O_n)$ est une proposition mathématique simple irréductible, elle est donc non-floue et de plus si elle est vraie A est un concept particulier non-flou.

On remarque qu'on pourra utiliser une proposition mathématique simple de type $D_A(O_1,…,O_n)$ ou $D'_A(O_1,…,O_n)$ dans une proposition mathématique simple ou une proposition mathématique étant utilisées dans une définition mathématique simple ou une proposition mathématique simple, identifiant A avec un symbole particulier associé à une définition auxiliaire.

DEFINITION 2.12 C :

Généralisant la Définition 2.10, une définition mathématique simple $D(o,O_1,..,O_n)$ est *basique* si pour tous objets $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, il existe un ensemble noté $B(O_{10},..,O_{n0})$ tel que tout objet O_0 correspondant à $D(o,O_{10},..,O_{n0})$ appartient à $B(O_{10},..,O_{n0})$.

REMARQUE 2.12D :

De la même façon que dans la Remarque 2.7, on justifie que si $A(O_1,..,O_n)$ est un ensemble dont les éléments correspondent à la définition non-floue $D(o,O_1,..,O_n)$, alors $A(O_1,..,O_n)$ est défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_n$.

On utilisera aussi le concept fondamental de définition récursive Platoniste :

DEFINITION 2.13 A:

Une *définition récursive Platoniste* $D_R(t_0)$ est définie par la donnée de son *premier terme* t_0 , défini uniquement par une définition générale $D_{PR1}(o)$, d'une *propriété récursive* $D_{RP}(o)$ qui est une définition générale non-floue et d'une *clause de récursion* $D_{RC}(o,o_1)$ qui est une définition non-floue telle que :
(i)Si q est le symbole particulier non-flou associé à $D_{RP}(o)$, alors q est un concept particulier non-flou, et si s(q) est le symbole particulier non-flou associé à $D_{RC}(o,q)$, alors s(q) est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de q et de plus « $D_{RP}(s(q))$ est vraie »).

(ii)t_0 a la *propriété récursive.* (c'est-à-dire $D_{RP}(t_0)$ est vraie).

(iii) « t est *un terme de la définition récursive* $D_R(t_0)$ » est équivalent à « t est identique à t_0 ou il existe q_{DR} tel que q_{DR} est un terme de la définition récursive $D_R(t_0)$ et $D_{RC}(t,q_{DR})$ est vraie ». On dira que t est *le successeur* de q_{DR} dans $D_R(t_0)$ et on emploiera la notation $t=s(q_{DR})$.

AXIOME 2.13 B :

Si $D_R(t_0)$ est une définition récursive Patoniste, alors « un terme de $D_R(t_0)$ » est un concept général non-flou, et donc $D_R(o)$: «o est un terme de $D_R(t_0)$ » est une définition mathématique simple non-floue d'après l'Axiome 2.5A.

Il semble alors intuitivement évident qu'il existe un ensemble dont les éléments sont les termes de la définition récursive, et qui est défini uniquement en fonction de t_0. Ceci signifie qu'il existe un ensemble $A(t_0)$ défini uniquement en fonction de t_0 et dont les éléments correspondent à la définition : $D_R(o)$: « o est un terme de $D_R(t_0)$ ». Nous admettrons Axiomatiquement l'existence de $A(t_0)$ dans l'Axiome 2.14.

Finalement, l'Axiome permettant d'obtenir l'existence d'ensembles dans la TMP, dont certains points ont été justifiés précédemment et d'autres sont admis dans la Théorie classique des ensembles (qui doit être vraie dans la TMP) est le suivant :

Dans cet Axiome et ce qui suit:
-On appellera un *ensemble non-flou* un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des ensembles.
-A et B étant 2 ensembles, A *est inclus* dans B signifiera classiquement (A,B) est tel que « A est un ensemble et B est un ensemble et « Si x est tel que x est élément de A, alors x est élément de B » » et donc d'après l'Axiome 2.5 « est inclus » peut représenter une unique relation non-floue et pourra être utilisé dans une définition ou une proposition mathématique simple.
-Si on donne une définition sous la forme $D(o,O_1,..,O_n)$, $O_1,..,O_n$ étant des concepts non-flous, on supposera alors toujours implicitement que $D(o,O_1,..,O_n)$ est une définition mathématique simple utilisant les *concepts* particuliers non-flous prédéfinis $O_1,..,O_n$.
(A étant un symbole non-utilisé, « Si A est un C_1 » aura la même signification que « Si A est tel que A est un C_1 » (« un C_1 » concept général non-flou)).

AXIOME 2.14 :

a)Si x est tel que x est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP , alors il existe un et un seul A tel que A={y tel que y=x} . On identifiera alors l'objet représenté par A avec b(x)={x}.

D'après la Remarque 2.12A) on peut identifier « b » à une fonction-concept définie sur le concept général « un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP ». x étant un concept particulier non-flou, on pourra donc utiliser {x}, dans une définition non-floue.

b)Pour toute Définition récursive Platoniste $D_R(t_0)$ il existe un et un seul ensemble $A_{DR}(t_0)$, dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition D(o) :« o est un terme de (la Définition récursive) $D_R(t_0)$ ».

c)Si A est un ensemble et B est un ensemble alors il existe un et un seul ×(A,B) (noté aussi A×B) tel que A×B={(x,y) tel que « x est élément de A et y est élément de B »}.

-Si A est un ensemble, alors il existe un et un seul *P*(A) tel que P(A)={B tel que « B est un ensemble et B est inclus dans A »}.

-Si A est un ensemble et B est un ensemble alors il existe un et un seul U(A,B) (noté aussi AUB) tel que AUB={x tel que « x est élément de A ou x est élément de B »} .

D'après la Remarque 2.12A on peut identifier « U », « × » avec des fonction-concepts définies sur le concept général « un couple d'ensemble ». De même , on peut identifier « *P* »avec une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble ».

d)On suppose :
(i)A est un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des ensembles non vides.
(ii)a est le concept particulier non-flou associé à la définition $D_a(o,A)$: « o est élément de A.
(iii)B(a) est un symbole particulier non-flou associé à une définition mathématique simple $D_B(o,a)$,B(a) étant un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de a et pouvant représenter seulement des ensembles.
Alors on admettra axiomatiquement l'existence d'un concept particulier non-flou, qu'on notera par convention $U(B(a))_A$, défini uniquement en fonction de A, tel que $U(B(a))_A$ = {x tel que $D_U(x,A)$: « Il existe a tel que « a est élément de A et « si B(a) est tel que $D_B(B(a),a)$, alors x est élément de B(a) » » »}.
On généralise ce qui précède, $A,O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous pré-définis, $B(a,O_1,..,O_n)$ étant un concept particulier non-flou associé à une définition mathématique simple $D_B(o,a,O_1,..,O_n)$, $B(a,O_1,..,O_n)$ étant défini uniquement en fonction de $a,O_1,.,O_n$ et ne pouvant représenter que des ensembles. On notera alors l'ensemble obtenu $U(B(a,O_1,.,O_n))_A$.
Ce qui précède demeure valide remplaçant A par un concept général non-flou pouvant représenter uniquement un ensemble non vide A_G (Pour le montrer, il suffit de considérer le concept particulier non-flou A pouvant représenter seulement A_G).

On remarque que si on a une fonction-concept F_C telle que $(O_1,\ldots,a,..,O_n)$sans paramètre fixe soit inclus dans Dep(F_C) (C'est-à-dire pour tous $O_{10},.,a_0,..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,a,.,O_n$, $(O_{10},.,a_0,..,O_{n0})$ appartient au concept général Dep(F_C)), et que de plus $F_C(O_1,..,a,..,O_n)$ ne peut représenter que des ensembles, alors $F_C(O_1,..,a,O_n)$ pourra être identifié avec $B(a,O_1,.,O_n)$ tel qu'on l'a défini plus haut. On obtient donc l'existence d'un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $A,O_1,..,O_n$ et qu'on notera $U(F_C(O_1,.,a,..,O_n))_A$. (On pourra aussi remplacer l'indice « A » par l'indice « a|A » s'il y a ambiguité.)
Par exemple, f étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des applications dont l'ensemble de départ est **N** et l'ensemble d'arrivée ne contient que des ensembles (qu'on définira plus loin mais qui correspondent à leur définition classique), d'après l'Axiome précédent on aura l'existence d'un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de f, ne pouvant représenter que des ensembles et qu'on pourra noter $U(f(a))_{\mathbf{N}}$. (On verra plus loin que « f(a) » a par convention la même signification que im(f,a), im étant une fonction-concept).

On pourra montrer simplement utilisant cet Axiome 2.14 qu'il existe un concept non-flou $\cap_A$(B(a,A)), défini de façon évidente, et défini uniquement en fonction de A.

e)Si D(o) est une définition générale mathématique simple basique, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à D(o). On a vu dans la Remarque 2.7 que cet ensemble est unique. Ceci est aussi vrai si on a des concepts particuliers non-flous $O_1,\dots,O_n$, et qu'on a la définition mathématique simple basique $D(o,O_1,..,O_n)$. Alors, on obtient l'existence d'un concept non-flou $A(O_1,..,O_n)$, défini uniquement en fonction de $(O_1,\dots,O_n)$ et dont les éléments correspondent à $D(o,O_1,\dots,O_n)$. Alors, si $(O_1,..,O_n)$ représente $(O_{10},..,O_{n0})$, il existe un unique ensemble $A(O_{10},..,O_{n0})$ dont les éléments correspondent à $D(o,O_{10},..,O_{n0})$.

On peut utilisant l'Axiome précédent définir les fonction-concepts « ∩ » et « / ».

REMARQUE 2.15 :

a)On remarque qu'en 2.14a), on a mis la condition que si on a un ensemble {x}, x ne peut pas représenter l'EMP . En effet, l'EMP est un objet mathématique extrêmement particulier, et on a donc choisi dans la TMP qu'il ne puisse pas être élément d'un ensemble. On peut d'ailleurs déduire de 2.14a) et e) qu'il n'existe aucun ensemble ayant pour élément l'EMP. On considèrera donc toujours que les ensembles considérés ne contiennent pas l'EMP. On rappelle qu'on a admis dans l'Axiome 2.2.C qu'aucun couple ne pouvait avoir l'EMP comme un de ses 2 termes. Ceci entraînera qu'aucune séquence finie existant dans l'EMP $(O_{10},\dots,O_{n0})$ ne peut avoir l'EMP comme un des termes.

b)On remarque que d'après l'Axiome 2.14e), si D(o) est basique et non-floue mais qu'il n'existe aucun objet correspondant à D(o), alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à D(o) et qui est l'ensemble vide.

c) D'après la DEFINITION 2.12.A, A et B étant 2 concepts particuliers représentant des ensembles, on peut utiliser dans une relation non-floue les concepts particuliers non-flous définis uniquement en fonction de A et (ou) B qu'on a définis dans l'Axiome 2.14 : A×B, AUB, A∩B et *P*(A). Et si x est un concept particulier non flou ne pouvant pas représenter l'EMP, on peut utiliser le concept non-flou {x} défini dans l'Axiome 2.14 dans une définition non-floue. On peut aussi dans une définition non floue D(o) utiliser, A étant un ensemble o×A, oUA ou {o}.
En effet, on a identifié « U », « × », « ∩ » avec des fonction-concepts définies sur le concept général de départ « un couple d'ensemble », on a identifié « *P* »avec une fonction-concept définie sur le concept général de départ « un ensemble », et on a identifié « b » avec une fonction-concept définie sur le concept général de départ « un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP » tel que b(x) est identifié avec à {x} .

Nous allons maintenant établir des Lemmes et Propositions fondamentaux, qui nous permettrons d'obtenir plus loin l'existence de concepts généraux non-flous de la TMP qui pourront être identifiés aux concepts classiques.

LEMME 2.16 :

A étant un ensemble, alors il existe et un seul e(A) tel que e(A)={a tel que il existe x tel que « x est élément de A et a={x} »}.({x} représente le concept particulier non-flou introduit en 2.14a)).

D'après la Remarque 2.12A, on pourra donc utiliser e(A) dans une définition non-floue, A étant un concept particulier prédéfini représentant un ensemble, ou e(o) dans une définition non-floue D(o). En effet on peut identifier « e », d'après la Remarque 2.12A, avec une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble».

Preuve :

On a d'après l'Axiome 2.14a une fonction-concept b définie sur le concept général « un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP » telle que b(x)={x}.

On suppose que A est défini par « A est un ensemble ».
On considère la définition D(o,A) :
« Il existe a élément de A tel que o est identique à {a} »
Cette définition est non-floue d'après la Définition 2.5.
De plus elle est basique car il est évident que si A représentant A_0, O_0 correspond à la définition $D(o,A_0)$, alors O_0 est élément de $E_0=P(A_0)$.
Et donc d'après l'Axiome 2.14, il existe un ensemble e(A) dont les éléments correspondent à la définition précédente D(o,A).

DEFINITION 2.17A :

a)A et B étant des concepts particuliers non-flous définis par « (A,B) est tel que « A est un ensemble non vide et B est un ensemble non vide », on peut définir un concept particulier non-flou *F*(A,B), pouvant représenter seulement des ensembles et défini uniquement en fonction de A et B, qu'on peut identifier avec *l'ensemble des applications* de A dans B. On peut identifier *F* avec une fonction-concept et « *une application* » avec un concept général non-flou.

b)Si f est élément de *F*(A,B), on dira que A est *l'ensemble de départ de(la fonction)* f et B *est l'ensemble d'arrivée de (la fonction)* f. On définira aussi la fonction-concept F_1 telle que $F(A,B)=\{(A,B)\}\times F_1(A,B)$. On définira aussi dans cette section la concept général non-flou « une *séquence indexée sur un ensemble*» et la relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 « *est une séquence indexée sur l'ensemble* ».

On pourra donc utiliser *F*(A,B) ou F_1(A,B) dans une définition ou une proposition mathématique simple, A et B étant des symboles particulier prédéfinis.

Définition complète des concepts du a) et de b):

On définit A et B par « (A,B) est tel que « A est un ensemble non-vide et B est un ensemble non vide». On rappelle qu'en 2.14c), on a défini la fonction-concept « *P* » et la fonction-concept « × » qui est définie sur le concept général « un couple d'ensemble ». On peut donc d'après la DEFINITION 2.12A utiliser le concept non-flou *P*(A×B) défini uniquement en fonction de A et B, dans une définition mathématique simple.

On considère alors la définition de paramètres fixes A,B:
D_1(o,A,B) : « o est un élément de *P*(A×B) et pour tout a tel que a est élément de A, il existe un et un seul C(o,a) tel que « C(o,a) est élément de o et a est le premier terme de C(o,a) » ».
(On a utilisé (implicitement) une définition auxilliaire $D_{aux}(o_c,o,a)$ dans la définition précédente).
Cette définition est évidemment basique et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5A. Donc d'après l'Axiome 2.14e), il existe un concept particulier non-flou F_1(A,B), défini uniquement en fonction de A et B et pouvant représenter seulement des ensembles, dont les éléments correspondent à D_1(o,A,B). On a donc défini la fonction-concept F_1, avec Dep(F_1) est le concept général (A,B) sans paramètres fixes.

On sait que (A,B) est un concept particulier non-flou, et donc d'après l'Axiome 2.14a), {(A,B)} est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de A et B.
Utilisant alors l'Axiome 2.14c, on obtient que $\{(A,B)\}\times F_1(A,B)$ est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de A,B.
On identifiera *F*(A,B) avec ce concept particulier non-flou, et donc on a défini la fonction-concept *F*.
Par définition, *une application* sera le concept général *F*(A,B) sans paramère fixes, et *une séquence indexée sur un ensemble* sera le concept général F_1(A,B) sans paramètres fixes. On définit alors aisément les relations non-floues d'ordre de multiplicité 2 « est l'ensemble d'arrivée de la fonction», « est l'ensemble de départ de la fonction », « est une séquence indexée sur l'ensemble ».

DEFINITION 2.17B:

a)Si A et B sont définis par « A,B) est tel que « A est un ensemble non vide et B est un ensemble non videles non vides», f est définie par « f est élément de *F*(A,B) et a est défini par « a est élément de A », on définit alors le symbole im(f,a) associé à la définition D(o,f,a) : « Si (A_1,B_1) est tel que « A_1 est l'ensemble de départ de f et B_1 est l'ensemble d'arrivée de f », alors ((A_1,B_1),(a,o)) est élément de f ». On pourra alors identifier « im » avec une fonction-concept de concept de départ (f,a) sans paramètres fixes.(Le symbole Im, avec une majuscule sera naturellement une fonction-concept avec comme concept de départ le concept général pouvant représenter toutes les applications).

Il est évident que d'après la définition d'une fonction d'ensemble, im(f,a) est un concept non-flou défini uniquement en fonction de f,a. Dans le cas où f est un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des applications, et a est un symbole particulier pré-défini par convention « f(a) » aura la même signification que « im(f,a) ». Si on a une définition mathématique simple D(o) et que d'après cette définition o ne peut représenter que des applications, a étant un symbole particulier pré-défini par convention «o(a) » aura la même significatin que « im(o,a) ».

Classiquement on dira que f(a) est l'image de a par f.

b)Si on définit s, A et a par « s est tel que s est une séquence indexée sur un ensemble », « A est tel que s est une séquence indexée sur l'ensemble A », « a est tel que a est élément de A », alors on pourra définir la fonction-concept ims dont le concept de départ est (s,a) sans paramètres fixes, et si (s,a) est défini par « (s,a) est tel que (s,a) appartient au concept général Dep(ims), ims(s,a) est le concept particulier non-flou associé à D_{ims}(o,(s,a)) : « (a,o) est élément de s ».

Si s est un concept particulier non-flou pouvant représenter seulemeent des séquences indexées sur un ensemble et a est un symbole particulier pré-défini, par convention « s(a) » aura la même significationque « ims(s,a) ».

Si on a une définition mathématique simple D(o) et que d'après cette définition o ne peut représenter que des séquences indexées sur un ensemble, a étant un symbole particulier pré-défini par convention «o(a) » aura la même significatin que « ims(o,a) ».

LEMME 2.18 :

On suppose que A et B sont des concepts particuliers non-flous pouvant seulement représenter des ensembles non-vides.

a)Si a est défini par « a est élément de A » et si on a une définition mathématique simple D_{im}(o_i,a,B)) telle qu'il existe un concept non-flou noté f_B(a) associé à D_{im}(o_i,a,B) et défini uniquement en fonction de a et B et que d'aprés cette définition , f_B(a) est élément de B, alors il existe un concept non-flou f défini uniquement en fonction de A,B, associé à la définition D_f(o,A,B) : « o est un élément de *F*(A,B) et si pour tout a tel que a est élément de A, si f_B(a) est tel que D_{im}(f_B(a),a,B) alors, o(a) est identique à f_B(a) ».

On pourra définir f par la proposition mathématique simple :

f_B est telle que « f_B est élément de *F*(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A, D_{im}(f_B(a),a,B) ».

Ce qui précède demeure vrai si on remplace D_{im}(o_i,a,B) par D_{im}(o_i,a).

b)Dans de nombreux cas f(a) n'est pas défini uniquement en fonction de a, mais en fonction de a,O_1,….,O_n, O_1,…,O_n étant des concepts non-flous (A et B pouvant être parmi eux). Alors si a est défini par « a est élément de A » et si on a une définition mathématique simple D_{im}(o_i, a, O_1,..,O_n) telle qu'on ait un concept non-flou noté $f_B(a)_{(O1,..,On)}$ associé à D_{im}(o_i,a,O_1,..,O_n) et défini uniquement en fonction de a, O_1,..,O_n avec $f_B(a)_{(O1,...,On)}$ est élément de B, alors il existe un concept particulier non-flou f associé à la définition D_f(o,A, B, O_1,..,O_n) : « o est un élément de *F*(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A, si $f(a)_{(O1,..,On)}$ est le symbole particulier associé à D_{im}(o_i,a,O_1,..,O_n), alors o(a) est identique à $f(a)_{(O1,..,On)}$ », f étant défini uniquement en fonction de A,B,O_1,..,O_n .

Pour définir f, on utilisera la proposition mathématique simple:

$D(f,A,B,O_1,..,O_n)$: f est telle que « f est élément de $F(A,B)$et pour tout a tel que a est élément de A, $D_{im}(f(a),a,O_1,..,O_n)$ ».

On peut généraliser immédiatment ce qui précède si A ou B sont des cocnepts généraux non-flous représentant chacun un unique ensemble non vide.

Preuve :

a)On considère alors la définition $D_2(o,A,B)$ de paramètre fixe A,B:
$D_2(o,A,B)$: « Il existe a élément de A , tel que si $f_B(a)$ est tel que $D_{im}(f_B(a),a,B)$ alors o est identique à $(a,f_B(a))$ ».
A,B représentant simultanément A_0,B_0, il est évident que si $D_2(O_0,A_0,B_0)$ est vraie, alors O_0 est élément de $A_0 \times B_0$, puisqu'on a supposé $f_B(a)$ est élément de B.
Donc $D_2(o,A,B)$ est basique, et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5A.

Donc d'après l'Axiome 2.14.e), il existe un concept non-flou noté $f_{C(A,B)}$, défini uniquement en fonction de (A,B) associé à la définition mathématique simple:
$D_3(o,A,B)$: « o={x tel que $D_2(x,A,B)$ » .

On considère alors le concept particulier non-flou $f_{(A,B)}$ défini par « $f_{(A,B)}$ est tel que $f_{(A,B)} =((A,B),f_C(A,B))$. Il est évident que $f_{(A,B)}$ est défini uniquement en fonction de A et B et que de plus $f_{(A,B)}$ est élément de $F(A,B)$.

A,B représentant simultanément A_0, B_0 il est évident $f_{(A0,B0)}$ correspond à $D_f(o,A_0,B_0)$. De plus on montre aisément que si f_0 correspond à $D_f(o,A_0,B_0)$, nécessairement f_0 est identique à $f_{(A0,B0)}$. Et donc si f est le symbole particulier non-flou associé à $D_f(o,A,B)$, alors f est un concept pariculier non-flou défini uniquement en fonction de A et B.

b)$O_1,..,O_n$ pouvant représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$, on considère les concepts générau non-flous $O_{10G},..,O_{n0G}$ avec O_{i0G} peut représenter seulement O_{i0}, et on définit les concepts particuliers non-flous $A(O_{10G},.,O_{n0G})$ et $B(O_{10G},.,O_{n0G})$ tels que $(A(O_{10G},.,O_{n0G}), B(O_{10G},.,O_{n0G}))$ peut représenter (A_0, B_0) si et seulement si $A,B,O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $A_0,B_0,O_{10},..,O_{n0}$. Puis on applique le a).

LEMME 2.19 :

Si A est un ensemble non vide, B est un ensemble non vide et f est élément de $F(A,B)$, alors pour tout b élément de B, il existe un et un seul $f^{-1}(b)$ tel que $f^{-1}(b)$ ={x tel que « x est élément de A et f(x)=b »} .

Comme on a défini im(f,a) on peut de la même façon identifier $f^{-1}(b)$ avec ant(f,b), ant étant une fonction-concept.

Preuve :

Soit f définie par « f est telle que f est une application », A, B définis par «(A,B) est tel que « A est l'ensemble de départ de f et B est l'ensemble d'arrivée de f » et b le concept associé à la définition de paramètre fixe B :« o est élément de B ».
f et b sont des concepts non-flous d'après l'Axiome 2.5A et le Lemme 2.17.

On considère alors la définition de paramètres fixes f ,b:
D(o,b,f) : « Si (A_1,B_1) est tel que « A_1 est l'ensemble de départ de f et B_1 est l'ensemble d'arrivée de f », alors $((A_1,B_1),(o,b))$ est élément de f »
Il est évident que D(o,b,f) est basique et qu'elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5A.Donc il existe d'après l'Axiome 2.14e) un ensemble non-flou ant(f,b) dont les éléments correspondent à D(o,b,f),et qui est défini uniquement en fonction de f et b.

On a aussi le Lemme :
LEMME 2.20 :

Si A est un ensembe non vide, B est tel que B est élément de *P*(A) , alors il existe un un et un seul $f_{Car(B),A}$ symbole particulier associé à la définition D_f(o,A,B) : « o est élément de *F*(A,{σ,{σ}}) et pour tout a élément de A, « « a est élément de B est équivalent à o(a)={σ} » et « a n'est pas élément de B est équivalent à o(a)=σ » ».

On dira alors que $f_{Car(B),A}$ est la *fonction caractéristique* de B dans A.

Le lemme précédent entraîne qu'on peut définir une fonction concept notée « fonction caractéristique » défini sur le concept général pouvant représenter tous les (A,B), avec A est tel que A est un ensemble non-vide et B est tel que B est inclus dans A.

On a alors « fonction caractéristique(A,B) » est identique à $f_{Car(B),A}$.

Preuve :

On suppose donc que A ne peut représenter l'ensemble vide.
Le cas où B est égal à l'ensemble vide est évident, on supposera donc que B est différent de l'ensemble vide.
Nous représenterons l'ensemble vide par σ ou par le symbole 0 et {σ} par le symbole 1.
σ est un concept non-flou représentant un unique objet mathématique et donc {σ} est un concept non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.14a). {σ,{σ}} représene donc un unique objet d'après l'Axiome 2.14.
A étant un ensemble non-vide et B étant le concept particulier non-flou associé à « o est élément de *P*(A) et o est différent de l'ensemble vide», d'après l'Axiome 2.5 B est un concept particulier non-flou.

On définit alors le concept non-flou a par « a est élément de A ».
On considère alors le symbole f_B(a),associé a définition non-floue de paramètres fixes a,B :
D_{im}(o,a,B) : « Si a est élément de B o alors est identique à {σ} et si a n'est pas élément de B alors o est identique à σ ».

Il est évident que f_B(a) est défini uniquement en fonction de a et B. D'après l'Axiome 2.18, on peut alors définir $f_{Car(B),A}$ par la proposition mathématique simple:
« $f_{Car(B),A}$ est élément de *F*(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A Dim($f_{Car(B),A}$,a,B) ».

D'après l'Axiome 2.18 $f_{Car(B),A}$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de A et B ce qui démontre le Lemme.

On obtient facilement la réciproque du Lemme précédent :

LEMME 2.21 :

Si A est un ensemble non vide et f est élément de *F*(A,{0,1}) , alors « il existe un et un seul B tel que B=f^{-1}(1) ».

3.CONCEPTS BASIQUES FONDAMENTAUX

En utilisant les chapitres précédents, on peut alors montrer théoriquement qu'on peut identifier les concepts mathématiques classiques à des concepts non-flous existants dans l'EMP ,c'est-à-dire que les concepts mathématiques classiques existent au sens de la TMP.

PROPOSITION 3.1 :

Il existe un concept général non-flou qu'on peut identifier à **N**.

Preuve :

On considère la définition récursive Platoniste $D_{\mathbf{N}}(\sigma)$ (notée $D_{\mathbf{N}}$) définie par :
-σ (l'ensemble vide), est le premier terme de la définition récursive $D_{\mathbf{N}}$
-La propriété récursive est $D_{NP}(o)$: « o est un ensemble ».
-La clause de récursion de $D_{\mathbf{N}}$ est $D_{NC}(o,o_1)$: « s(o) est identique à $e(o_1)U\{\sigma\}$ », « e » étant la fonction-concept définie en 2.16.

On définit q par : q est le symbole particulier non-flou associé à $D_{NP}(o)$. q est évidemment un concept particulier non-flou. On définit alors $s_{\mathbf{N}}(q)$ par : $s_{\mathbf{N}}(q)$ est tel que $D_{NC}(s_{\mathbf{N}}(q),q)$: « $s_{\mathbf{N}}(q)$ est identique à e(q)U{σ} », e(q) étant le concept non flou défini uniquement en fonction de q au Lemme 2.16.(e(σ)=σ et si q est différent de σ, e(q)={a tel que il existe x tel que x est élément de q et a={x}}.

Il est évident que $s_{\mathbf{N}}(q)$ est défini uniquement en fonction de q, puisque d'après le Lemme 2.16 e(q) est défini uniquement en fonction de q. De plus $s_{\mathbf{N}}(q)$ est un ensemble et donc il a la propriété récursive.
Donc $D_{\mathbf{N}}$ est bien une définition récursive Platoniste.

D'après l'Axiome 2.14b), il existe un ensemble noté A(σ), défini uniquement en fonction de σ et donc unique , et dont les éléments sont les termes de la définition récursive, c'est-à-dire :σ, {σ},{σ,{σ}}, {σ,{σ},{{σ}}},…, qu'on identifiera à 0,1,2,3….On identifiera donc A(σ) à un concept général non-flou représenté par **N** , et de même 0,2,3.. à des concepts généraux non-flous.

On identifiera $s_{\mathbf{N}}$ avec une fonction-concept de concept de départ « un élément de **N** ».

On admet comme un axiome évident (Axiome de récursivité) l'Axiome suivant :

AXIOME 3.1A : (Axiome de récursivité) :

Soit $D_R(t_0)$ une définition Platoniste récursive. t_0 st donc le 1[ier] terme de D_R.
Soit P(o) une définition mathématique simple.
Alors si $P(t_0)$ est vraie et de plus si q_{DR} étant un terme de D_R on a $P(q_{DR})$ entraîne $P(s(q_{DR}))$, alors $P(q_{DR})$ est vraie pour tout terme q_{DR} de la définition récursive.

On aurait pu considérer une définition récursive Platoniste plus simple comme celle définie par s(q)=qU{q} (qui donne la séquence de von Neumann). Les résultats obtenus pour $D_{\mathbf{N}}$ se généralisent à cette nouvelle définition récursive. Cependant, les 2 définitions récursives ne définissent pas le même ensemble **N**.

DEFINITION 3.1Ba : (Définition récursive ordonnée).

Un cas particulier est le cas où on a une définition récursive Platoniste $D_R(t_0)$ telle que :
(i)t_0 est un couple de premier terme 0.
(ii)Si q est le symbole particulier associé à $D_{RP}(q)$, q est un concept particulier non-flou ne pouvant représenter que des couples dont le premier terme est un naturel.
(iii)Si s(q) est tel que $D_{RC}(s(q),q)$ et j est tel que j est le premier terme de s(q) et i est tel que i est le premier terme de q, alors $j=s_{\mathbf{N}}(i)$.
On dira alors que $D_R(t_0)$ est une *définition Platoniste récursive ordonnée*.

Une conséquence immédiate de l'Axiome 2.14b est la proposition para-mathématique, permettant d'obtenir des propositions mathématiques simples :

PROPOSITION 3.1Bb :

$D_R(t_0)$ étant une définition Platoniste récursive ordonnée, avec les notations précédentes il existe A tel que :
(i)A est un ensemble et pour tout a tel que a est élément de A a est un couple et si x est tel que x est le premier terme de a alors x est un naturel.
(ii)Pour tout i tel que i est élément de **N** il existe un et un seul b tel que b est élément de A et i est le premier terme de b.
(iii)t_0 est élément de A et pour tout j tel que j est élément de **N**, $D_{RC}(((s_{\mathbf{N}}(j),A(s_{\mathbf{N}}(j))), (j,A(j))$ » ((j,A(j)) étant identifié avec l'élément de A de premier terme j).

Il est évident que toute définition récursive Platoniste induit naturellement une définition récursive Platoniste ordonnée.

On peut généraliser la proposition précédente avec les hypothèses suivantes :

On suppose qu'on a une définition mathématique simple $D_{PR1}(o,O_1,..,O_r)$ (dite définition du premier terme de D_R), et une définition mathématique simple $D_{RC}(o,o_1,O'_1,..,O'_c)$ (dite clause de récursion de D_R) et une définition mathématique simple $D_{RP}(o,O''_1,..,O''_p)$ (dite propriété récursive de D_R), avec certains O_i peuvent être identiques à certains O'_j et tous les O''_k sont parmi les O_i et les O'_j.
On suppose de plus :
(i)Si t_0 est le symbole particulier associé à $D_{PR1}(o,O_1,..,O_r)$ t_0 est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_r$ et t_0 ne peut représenter que des couples dont le premier terme est 0 et $D_{RP}(t_0,O''_1,..,O''_p)$ (identifié avec une proposition mathématique simple) est vraie.
(ii)Si q est le symbole particulier associé à $D_{RP}(o,O''_1,..,O''_p)$, q est un concept particulier non-flou et q ne peut représenter que des couples dont le premier terme est un naturel.
(iii)Si s(q) est le symbole particulier associé à $D_{RC}(o,q,O'_1,..,O'_c)$, s(q) est un concept particulier défini uniquement en fonction de q, $O'_1,..,O'_c$ et $D_{RP}(s(q), O''_1,..,O''_p)$ est vraie et si i est le premier terme de q et si j est le premier terme de s(q) alors $j=s_{\mathbf{N}}(i)$.

On dira alors que D_R est une *définition récursive Platoniste ordonnée paramétrée*. On obtiendra alors la proposition, généralisant celle obtenue pour les définitions récursives ordonnées non pramétrées et permettant d'obtenir des propositions mathématiques simples vraies du type $P(O_1,..,O_r,O'_1,..,O'_c)$:

PROPOSITION 3.1Bc :

D_R étant une définition récursive Platoniste ordonnée paramétrée, avec les notations précédentes, il existe un et un seul A (noté aussi $A(O_1,..,O_r,O'_1,..,O'_c)$), défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_r,O'_1,..,O'_c$, tel que :
(i)A est un ensemble et pour tout a tel que a est élément de A, « a est un couple et si x est tel que x est le premier terme de a, x est un naturel ».
(ii)Pour tout i tel que i est élément de **N**, il existe un et un seul b tel que « b est élément de A et i est le premier terme de b ».
(iii)Si t_0 est le concept particulier associé à $D_{PR1}(o,O_1,..,O_r)$, alors t_0 (noté aussi $t_0(O_1,..,O_r)$) est élément de A et pour tout j tel que j est élément de **N**, $D_{RC}((s_{\mathbf{N}}(j),A(s_{\mathbf{N}}(j)),(j,A(j)),O'_1,..,O'_c)$ ». (Identifiant (j,A(j)) avec l'élément de A de premier terme j).

On écrira : « A est tel que « A est une séquence indexée sur **N** et $D_{PR1eq}(A(0),O_1,..,O_r)$ et pour tout j élément de **N**,$D_{RCeq}(A(s_{\mathbf{N}}(j)),A(j),O'_1,..,O'_c)$ » ».
(Avec $D_{RCeq}(A(s_{\mathbf{N}}(j)),A(j),O'_1,..,O'_c)$ est équivalent avec $D_{RC}((s_{\mathbf{N}}(j),A(s_{\mathbf{N}}(j)),(j,A(j)),O'_1,..,O'_c)$, et de même pour $D_{PR1eq}(A(0),O_1,..,O_r)$).

On peut démontrer la proposition précédente en considérant les concepts généraux non-flous $O_{1G},..,O_{rG},O'_{1G},.,O'_{cG}$ pouvant être identifiés respectivement et simultanément à des concepts généraux non-flous $O_{10G},..,O_{r0G}$, $O'_{10G},.,O'_{c0G}$, avec par convention O_{i0G} (resp O'_{j0}) concept général non-flou pouvant représenter uniquement O_{i0} (resp O'_{j0}), si on a $(O_{10},..,O_{r0},O'_{10},.,O'_{c0})$ appartient à $(O_1,..,O_r,O'_1,.,O'_c)$sans paramètres fixes. On dira que les O_{iG} sont des *concepts généraux flottants* car ils peuvent être identifiés avec plusieurs concepts généraux non-flous. Une définition ou une proposition mathématique simple pourra utiliser des concepts généraux flottants comme des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet mathématique ordinaires. On dira alors qu'elle est une proposition ou une définition mathématique simple *flottante*. Si elle n'en utilise pas on dira qu'elle est une définition ou une proposition mathématique simple *non-flottante*. Jusqu'ici on a considéré seulement des définitions ou propositions mathématiques simples non-flottantes et les résultats qu'on a obtenus étaient valables seulement pour celles-ci. Si une proposition ou une définition mathématique simple flottante utilise les concepts généraux flottants $n_{1G},..,n_{kG}$, par définition elle sera vraie si elle est vraie en remplaçant $n_{1G},.,n_{kG}$ par n'importe quels concepts généraux $n_{10G},.,n_{k0G}$ avec lesquels $n_{1G},.,n_{kG}$ peuvent être identifiés simultanément. (voir 3.4 et 3.10). On rappelle qu'on a défini une définition non-floue générale D(o) comme une expression telle que pout tout objet mathématique O_0 $D(O_0)$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. On dira que D(o) est une *définition non-*

floue au sens strict (et de même pour une définition non-floue du type $D(o,O_1,.,O_n)$). Remplaçant $n_{1G},.,n_{kG}$ par $n_{10G},.,n_{k0G}$, on obtient une définition mathématique simple non-flottante pour laquelle on peut utiliser les propriétés qu'on a établies pour ces dernières, et en particulier qui est donc une définition non-floue au sens stict. Cependant, une définition mathématique simple flottante n'est pas une définition non-floue au sens strict. On dira qu'elle est une *définition non-floue au sens large*. On utilisera des définitions mathématiques simples flottantes seulement dans des cas exceptionnels.

On pourra définir un symbole O en utilisant des concepts généraux non-flous flottants $n_{1G},..,n_{kG}$ tels que pour tous $O_{10},..,O_{k0}$ tels que $n_{1G},..,n_{kG}$ sont identifiés simultanément avec $O_{10G},.,O_{k0G}$, O est un concept particulier non-flou. On dira que O est un concept particulier non-flou *paramétré de paramètres* $n_{1G},..,n_{kG}$ et on l'écrira sous la forme $O_{n1G,..,nkG}$.

On appellera les 2 propositions fondamentales précédentes 3.1Bb et 3.1Bc *Propositions des ensembles récursifs ordonnés*. Ces Propositions sont fondamentales car elles permettent d'éviter l'utilisation explicite des définitions récursives Platonistes et aussi de repérer tous les termes d'une définition Platoniste récursive à l'aide des naturels.

On pourra cependant en général éviter l'utilisation des Propositions des ensembles récursifs ordonnés en utilisant directement des concepts généraux flottants.

DEFINITION 3.2A :

a)*Une bijection* est le concept général non-flou associé à la définition mathématique simple générale $D_{bij}(o)$: « o est une application et si (A,B) est tel que « A est un ensemble et B est un ensemble et o est élément de *F*(A,B) » , alors pour tout x élément de B, il existe un et un seul y tel que « y est élément de A et o(y)=x » ».

b)*Un ensemble fini* est le concept général non-flou associé à la définition mathématique simple $D_{EF}(o)$: « o est identique à l'ensemble vide ou « o est un ensemble et il existe (n,b) tel que « n est élément de **N** et b est une bijection et b est élément de *F*(o,n) » » ».

c)*Card* est une fonction-concept dont le concept de départ est le concept général non-flou « un ensemble fini » et tel que pour tout x tel que x est un ensemble fini, Card(x) est le concept particulier non-flou associé à la définition $D_{Card}(o,x)$: « « Si x est identique à l'ensemble vide alors o est identique à l'ensemble vide » et « si x est différent de l'ensemble vide alors « o est élement de **N** et il existe b tel que « b est une bijection et b est élément de *F*(o,x) » » ».
(On pourrait modifier la définition précédente en prenant comme concept de départ de « Card » le concept général « un ensemble », en a admettant que si A est défini par « A est tel que « A est un ensemble et A n'est pas un ensemble fini » », alors Card(A)=(Ø,Ø)).

REMARQUE 3.2B :

a)On remarque que les termes de la définition récursive $D_{\mathbf{N}}$ vérifient les Axiomes de Peano, c'est-à-dire, remplaçant « nombre » par « terme (de la suite récursive $D_{\mathbf{N}}$ définie précédemment)» :

A_{xp}1)Il existe un premier terme : σ
A_{xp}2)Chaque terme de la suite q a un unique successeur immédiat s(q).
Axp3)σ n'est le successeur immédiat d'aucun terme (Puisque sinon il contiendrait σ et serait donc non-vide.)
A_{xp}4)Si q_1 et q_2 sont 2 termes de la suite ayant le même successeur immédiat q_3 alors q_1 est identique à q_2 (Ceci se montre facilement).
A_{xp}5)Toute propriété Q(q) appartenant à σ et au successeur immédiat de tout terme ayant cette propriété appartient à tous les termes. (Ceci est évident car Q(σ) entraîne Q(s(σ))….qui entraîne de proche en proche Q(n), n terme quelconque de la suite).

On remarque que A_{xp}5 n'est qu'une forme de l'Axiome de récursivité.

b)Puisque les Axiomes de Peano sont des propositions vraies de la TMP concernant les naturels tels qu'on les a définis dans la TMP, on obtient que tous les théorèmes classiques concernant les naturels sont aussi vraies dans la TMP. En effet, d'après l'Axiome 2.2.E, les propositions qu'on peut déduire des propositions vraies de la TMP (et donc les théorèmes déduits des Axiomes de Peano) sont vraies.

DEFINITION 3.2C :

a)$O_{s(1)},..,O_{s(n)}$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, $\{O_{s(1)},.,O_{s(n)}\}$ pourra d'après les règles syntaxiques de convention être identifié avec $B_{s(n)}$ défini par la proposition $Q(O_{s(1)},.,O_{s(n)})$: « $B_{s(n)}$ est tel que « Si $B_{s(1)}$ est tel que $B_{s(1)}=\{O_{s(1)}\}$, $B_{s(2)}$ est tel que $B_{s(2)}=B_{s(1)}UO_{s(2)}$ et..et $B_{s(n-1)}$est tel que $B_{s(n-1)}=B_{s(n-2)}U\{O_{s(n-1)}\}$ alors $B_{s(n)}= B_{s(n-1)}U\{O_{s(n)}\}$» ». Cette proposition est obtenue par $\{O_{s(1)},.,O_{s(n)}\}=\{O_{s(1)}\}U,..,U\{O_{s(n)}\}$ et l'Axiome 2.14.

On a vu dans l'Axiome 2.14 que U pouvait être identifié avec une fonction-concept. Il en résulte que $Q(O_{s(1)},..,O_{s(n)})$ est une proposition mathématique simple.

De plus, supposant $O_{s(1)0},..,O_{s(n)0}$ représentés simultanément par $O_{s(1)},..,O_{s(n)}$, utilisant l'Axiome 2.14, une récurrence immédiate sur les signes distinctifs montre que dans $Q(O_{s(1)0},.,O_{s(n)0})$, pour s(i) dans {s(1),.,s(n)}, $B_{s(i)}$ peut représenter un et un seul ensemble (noté $\{O_{s(1)0},.,O_{s(i)0}\}$). Et donc les $O_{s(j)}$ étant des concepts particuliers non-flous, $B_{s(n)}=\{O_{s(1)},.,O_{s(n)}\}$ est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O_{s(1)},..,O_{s(n)}$. $O_{s(j)}$ pourra aussi être un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet.

On pourra plus généralement utiliser l'expression $\{O_{s(1)},..,O_{s(n)}\}$, défini par $Q(O_{s(1)},.,O_{s(n)})$, dans une définition ou une proposition mathématique simple en un emplacement où une définition auxiliaire peut utiliser $O_{s(1)},..,O_{s(n)}$ symboles particuliers non-flous pré-définis ou du type o_{ri}.

b)Une *séquence finie* sera le concept général non-flou associé à la définition mathématique simple générale $D_{SF}(o)$: « o est un couple ou « o est un ensemble fini non vide et pour tout i tel que i est élément de o, i est un couple et « si n est tel que Card(o)=n alors « Non(« n=0 ou n=1 ou n=2 ») » et pour tout j tel que j est élément de {1,..,n} il existe un et un seul x tel que « x est élément de o et j est le premier terme de x » » ».
(n étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulemement des naturels non nuls, on identifiera d'après les règles syntaxiques de convention {1,..,n} avec le concept particulier non-flou associé à $D(o_n,n)$: « o_n={k tel que « k est élément de **N** et 1 est inclus dans k et k est inclus dans n ») ».

c)On peut aisément définir la relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 « a comme nombre de termes» qui peut exister entre un couple (s,n), s séquence finie et n un naturel. (D_{sf}(s,n) : « s est un couple et n=2 » ou « s est une séquence finie et Card(s)=n ») (On écrira aussi « s est une séquence à n termes »).

d)On a déjà défini la relation non-floue « est le premier (ou le deuxième) terme de » pouvant exister entre un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et un couple. Il est évident qu'on peut généraliser ceci en admettant que la relation non-floue précédente peut exister entre un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP t et un naturel i et une séquence finie s ayant au moins 3 termes. (D(t,i,s) : « s est une séquence fini et « 3 est inclus dans s » et « (i,t) est élément de s » ».) (On écrira « t est le ième (premier) terme de s »).

PROPOSITION 3.3 :

Il existe des concepts généraux non-flous, qu'on peut identifier à **Z** et **Q**.

Preuve :

On a montré l'existence d'un concept général non-flou représentant un unique objet mathématique identifié à **N**.
D'après l'Axiome 2.14c), **N**×{1} représente un unique objet mathématique, qui est un ensemble (représenté par le concept général $\mathbf{Z}^+$), de même que **N***×{0}(représenté par le concept général $\mathbf{Z}^{*-}$) où **N***=**N**/{0} (On rappelle qu'on a identifié 1 et 0 à des concepts généraux représentant chacun un unique objet mathématique).

Et donc d'après l'Axiome 2.14, **N**×{1}U**N***×{0} représente un unique objet qu'on représentera par le concept général **Z**.
Z×(**Z** /{0,1}) représente un unique objet mathématique d'après l'Axiome 2.14.

On peut définir le concept général non-flou $C_{\mathbf{Q}}$ représentant une unique application de **Z**×(**Z** /{0,1}) dans *P*(**Z**×(**Z** /{0,1})) tel que pour tout élément (a,b) de **Z**×(**Z** /{0,1}) $C_{\mathbf{Q}}$((a,b))={(a',b') tel que (a',b') est élément de **Z**×(**Z** /{0,1}) et $a' \times_{\mathbf{Z}} b = a \times_{\mathbf{Z}} b'$}. (Comme on le verra dans la section suivante $\times_{\mathbf{Z}}$ est un concept général non-flou, défini très aisément en utilisant la multiplication dans **N** $\times_{\mathbf{N}}$, et représentant une unique fonction identifiée à la multiplication dans **Z**).

D'après l'Axiome 2.14e), $C_{\mathbf{Q}}$((a,b)) représente alors un ensemble défini uniquement en fonction de (a,b).

On définit alors **Q** comme le concept général non-flou pouvant représenter seulement Im($C_{\mathbf{Q}}$). (On peut identifier « Im » avec une fonction-concept).

PROPOSITION 3.4 :

a)L'addition et la multiplication dans **N**,**Q**,**Z** peuvent être identifiés à des objets mathématiques représentés par des concepts généraux ($+_{\mathbf{N}}$,$+_{\mathbf{Z}}$,$+_{\mathbf{Q}}$ et $\times_{\mathbf{N}}$, $\times_{\mathbf{Z}}$, $\times_{\mathbf{Q}}$).

b)De même on identifie « la valeur absolue dans **Q** de » et « l'opposé dans **Q** de » (notée $|\ |_{\mathbf{Q}}$) à des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet (Le premier étant une application de **Q** dans $\mathbf{Q}^+$, le second une application de **Q** dans **Q**) et la soustraction dans **Z** et **Q**, notées repectivement $-_{\mathbf{Z}}$,et $-_{\mathbf{Q}}$ à des concepts généraux non-flous représentant chacune une unique application.

c) On identifie aussi les relations d'ordres $<_E$,$>_E$,$\leq_E$,$\geq_E$, avec E l'ensemble **N**, **Q**,ou **Z** à des relations non-floues ayant la même signification que dans les mathématiques classiques.

Bien sûr on omettra les suffixes **N**,**Z**,**Q** lorsque le sens est évident d'après le contexte.

Preuve :

a) **N**×**N** représente un ensemble existant d'après l'Axiome 2.14.

On peut définir n_G et p_G concepts généraux non-flous flottants (voir 3.1Bc) tel que (n_G,p_G) peut être identifié à (n_{0G},p_{0G}) si et seulement si (n_0,p_0) est élément de $\mathbf{N}^2$. (n_G,p_G) pourra donc être identifié avec (1,3), (20,13).. . On rappelle (voir 3.1Bc) que les symboles n_G et p_G sont des *concepts généraux flottants* car ils peuvent être identifiés avec plusieurs concepts généraux non-flous.

On peut alors définir la définition récursive ordonnée D_{nG+} de premier terme (0,n_G), de propriété récursive D_{PRnG+}(o) : « o est un couple de naturel » et telle que s_{nG+}((i,j))= ($s_{\mathbf{N}}$(i),$s_{\mathbf{N}}$(j)). On définit A_{nG+} comme le concept général non-flou (flottant) représentant l'ensemble dont les éléments correspondent à la définition D_{AnG+}(o) : « o est un terme de D_{nG+} ». On considère alors la définition mathématique simple générale $D_{(nG,pG)}$ (o) : « (p_G,o) est élément de A_{nG+} ». On remarque que n_G et p_G étant identifiés avec des concepts généraux non-flous, il existe un et un seul objet mathématique correspondant à cette définition générale et que cet objet mathématique est élément de **N**. $+_{\mathbf{N}}$ est alors un concept général non-flou pouvant représenter une unique fonction et défini par :

-$+_{\mathbf{N}}$ est élément de *F*(**N**×**N**,**N**).
-$D_{(nG,pG)}$ ($+_{\mathbf{N}}$(n_G,p_G)).

On a alors complètement défini $+_N$. (En général et en particulier pour définir $+_N$, on pourra éviter d'utiliser des concepts généraux flottants en utilisant directement la proposition 3.1Bc). On obtient facilement : $s_N(n_G)=+_N(n_G,1)$ (noté n_G+_N1).

Plus généralement, si :

(i) A_G et B_G sont des un concepts généraux non-flous flottants pouvant chacun être identifié avec un concept général représentant un unique ensemble non vide.

(ii)a_G concept général flottant pouvant être identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique élément de A_G (et donc a_G concept général flottant).

(iii)$n_{1G},..,n_{kG}$ étant des concepts généraux flottants pré-définis et définis uniquement en fonction de a_G (C'est-à-dire a_G étant identifié avec a_{0G}, chaque n_{iG} peut être identifié avec un unique n_{i0G}), $D_{an1G,..nkGG}(o)$ est une *définition non-floue paramétrée* de paramètres $n_{1G},..,n_{kG}$, c'est-à-dire par définition que $n_{1G},..,n_{kG}$ pouvant être identifiés avec les concepts généraux $n_{10G},..,n_{k0G}$, $D_{n10G,..nk0G}(o)$ est *non-floue au sens strict* (C'est-à-dire on le rappelle que pour tout objet mathématiq$_{0G}$ ue O_0, $D_{n10G,..nk0G}(O_0)$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie) et de plus est restreinte aux objets mathématique non-relationnels et différents de l'EMP.

Il est évident que $n_{1G},..,n_{kG}$ étant définis uniquement en fonction de a_G, on pourra toujours remplacer la définition paramétrée précédente $D_{n1G,..,nkG}(o)$ par une définition paramétrée de paramètre a_G notée $D_{aG}(o)$.

(iv)A_G, B_G et a_G étant respectivement identifiés avec les concept généraux non-flous A_{0G},B et a_{0G}, il existe un et un seul b_0 tel que $D_{n10G,..,nk0G}(b_0)$ est vraie et de plus b_0 est élément de B_{0G}.

Alors on admettra qu'on peut définir un concept général flottant f_G , défini uniquement en fonction de A_G,B_G par :

-f_G est élément de $F(A_G,B_G)$.

- $D_{n1G,..,nkG}(f_G(a_G))$.

La proposition précédente a un caractère d'évidence et on pourrait l'admettre axiomatiquement. On peut cependant la prouver en introduisant l'*opérateur logique* H tel que, si x_G est un concept général flottant, $H(x_G)$ est un symbole pouvant représenter tout objet mathématique x_0 tel que x_G peut être identifié avec x_{0G}. On montre que $H(x_G)$ est un concept général non-flou :

On suppose qu'on a défini successivement les concepts généraux flottants $n_{1G},..,n_{kG}$, n_{iG} étant défini par une expression du type : « n_{iG} est le concept général flottant associé à $D_{niG,ni(1)G,..,ni(s(i)G}(o_i)$ », avec $D_{niG,ni(1)G,..,ni(s(i))G}(o_i)$ définition mathématique simple flottante utilisant les concepts généraux flottants $n_{i(1)G},..,n_{i(s(i))G}$ parmi $n_{1G},..,n_{i-1G}$. On définit alors les symboles particuliers $O_1,.,O_k$ par des définitions obtenues en remplaçant dans les définitions des n_{iG} « n_{iG} » par « O_i » et « est le concept général flottant associé à» par « est le symbole particulier associé à». On obtient des définitions mathématiques simples non-flottantes et que les O_i sont donc des concepts particuliers non-flous. De plus par définition, $O_{j(1)0},..,O_{j(s)0}$ étant des objets mathématiques quelconques, on définit « $n_{j(1)},\ldots,n_{j(s)}$ peuvent simultanément et respectivement être identifiés avec $O_{j(1)0G},..,O_{j(s)0G}$ » exactement de la même façon que « $O_{j(1)},..,O_{j(s)}$ peuvent représenter simultanément $O_{j(1)0},..,O_{j(s)0}$ ». Les 2 propositions sont donc équivalentes (au sens entraînement mutuel) et il en résulte que pour i parmi 1,..,k on peut identifier $H(n_{iG})$ avec O_i sans paramètres fixes et donc $H(n_{iG})$ est un concept général non-flou.

Or on a établi l'assertion précédente avec les $D_{niG,ni(1)G,..,ni(s(i))G}(o_i)$ définitions mathématiques simples flottantes utilisant les concepts généraux flottants $n_{i(1)G},..,n_{i(s(i))G}$. Dans le cas général, et notamment si on utilise l'Axiome de récursion comme pour définir $+_N$, ces définitions ne sont pas des définitions mathématiques simples flottantes, mais sont des définitions non-floues paramétrées telles qu'on les a définies dans (iii). Il est évident qu'on pourra toujours identifier une définition mathématique simple flottante avec une définition non-floue paramétrée mais à priori la réciproque n'est pas vraie. On va cependant montrer que dans ce cas général, on peut se ramener au cas particulier qu'on a établi, et donc obtenir que dans le cas général, on a toujours $H(n_{iG})$ est un concept général non-flou.

Pour cela, on montre par récurrence sur p la proposition P(p) :

« $n_{1G},..,n_{pG}$ étant des concepts généraux flottants définis successivement en étant associés à des définitions non-floues paramétrées ou des définitions générales non-floues (restreintes aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP) $D_{n1G}(o),..$, $D_{npG,np(1)G,..,np(s(p))G}(o)$ (ou $D_{npG}(o)$),

alors il existe $R_1,..,R_p$ relations non-floues d'ordre de multiplicité s(1)+1,..,s(p)+1 telles que si $n_{1G},..,n_{pG}$ sont des concepts généraux non-flous flottants respectivement associés aux définitions mathématiques simples flottantes $R_1(o),\ldots,R_p(o,n_{p(1)G},..,n_{p(s(p))G})$ (ou $R_p(o)$), alors j(1),..j(k) étant parmi 1,..,p et $O_{10},..,O_{k0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP quelconques, les propositions « $n_{j(1)G},..,n_{j(k)G}$ peuvent être identifiés respectivement avec $O_{10G},..,O_{j(k)0G}$ » sont équivalentes, au sens entrainement mutuel, les n_{iG} étant définis par de la première façon (Avec les définitions non-floues paramétrées) ou de la 2ième façon (Avec des définitions mathématiques simples flottantes et les relations non-floues $R_1,.,R_p$) »

On remarque :

(i)Le fait que 2 propositions P1 et P2 s'entraînent mutuellement signifie que leurs significations sont les mêmes et donc on admettra axiomatiquement qu'on a alors Non(P1) et Non(P2) s'entraînent mutuellement, et de même, si on a aussi Q1 et Q2 qui s'entraînent mutuellement « P1 ou(exclusif) Q1 » et « P2 ou(exclusif)Q2 » s'entraînent mutuellement.

(ii)La conséquence du (i) et que si P(p) est vérifiée, utilisant le cas particulier qu'on a démontré on a en conservant les mêmes notations dans le cas général « $n_{j(1)G},..,n_{j(k)G}$ peuvent être identifiés ou(exclusif) ne peuvent pas être identifiés avec $O_{10G},..,O_{k0G}$ ».

Il est évident que pour p=1, P(p) est vraie. Supposons P(p-1) est vraie. Si n_{pG} est àssocié à une définition du type $D_{pG}(o)$, P(p) est évident. Si n_{pG} est associé à une définition de type $D_{npG,np(1)G,..,np(s(p))G}(o)$, on définit la relation R_p par :

Si $O_{10},\ldots,O_{s(p)+10}$ sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, « $R_p(O_{10},..,O_{s(p)+10})$ est équivalent à « « $n_{p(1)G},\ldots,n_{p(s(p))G}$ peuvent être respectivement et simultanément identifiés avec $O_{20G},..,O_{s(p)+10G}$ » et « si $n_{p(1)G},..,n_{p(s(p))G}$ peuvent être identifiés avec $O_{20G},..,O_{s(p)+10G}$ alors $D_{npG,O20G,..,Os(p)+10G}(O_{10})$ » ».

On remarque que la proposition précédente est de la forme : « $R_p(O_{10},..,O_{s(p)+10})$ est équivalent à « P et « si P alors Q » », avec :

-P est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. (A cause de l'hypothèse de récurrence).

De plus on a : « Si P n'est pas vraie, alors « Q n'est pas vraie (exclusivement) » », car alors Q contient un terme qui n'est pas défini et donc on peut admettre axiomatiquement que Q n'est pas vraie (exclusivement). Et on a aussi, « Si P est vraie, alors « Q est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie », à cause de la définition d'une définition non-floue paramétrée.

Or on admet axiomatiquement comme évident que si on a des propositions P1,P2,Q1,Q2 telles que P1 entraîne P2 et Q1 entraîne Q2, alors « P1 ou Q1 » entraîne « P2 ou Q2 ».

Il en résulte que puisqu'on a « P1 ou Non(P1) », on obtient « Q est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie ».

Et donc R_p est bien une relation non-floue.

Il en résulte qu'on obtient immédiatement que si $O_{10},..,O_{p0}$ sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on obtient que les propositions « $n_{1G},.,n_{pG}$ peuvent être identifiés simultanément avec $O_{10G},...,O_{p0G}$ » sont équivalentes, au sens entraînement mutuel, que les n_{iG} soient définis de la première ou la 2ième méthode. Ceci entraîne la validité de H(p).

Il est évident que H(p) entraîne qu'on a toujours $H(n_{iG})$ est un concept général non-flou, dans le cas général où les n_{iG} sont définis par des définitions non-floues paramétrées.

On suppose qu'on a défini des concepts particuliers non-flous $O_1,..,O_n$, O_n étant le dernier qu'on a défini. On suppose qu'avant de définir O_n, on a défini les concepts généraux flottants $n_{1G},..,n_{pG}$. Alors (O_n)sans paramètre fixe dépendra des concepts généraux $n_{10G},..,n_{p0G}$ avec lesquels on identifie $n_{1G},..,n_{pG}$. $n_{1G},..,n_{pG}$ étant identifiés avec $n_{10G},..,n_{p0G}$, (O_n)sans paramètre fixe pourra représenter un unique concept général non-flou. C'est pourquoi on dira que c'est *un concept général non-flou paramétré* et on pourra le représenter par $(O_n)_{n1G,.,npG}$sans paramètre fixe.

Une définition mathématique simple flottante pourra contenir des concepts généraux non-flous paramétrés. Cependant, dans le cas particulier où on a démontré que $H(n_{iG})$ était un concept général non-flou, les n_{iG} étaient associés à des définitions mathématiques simples flottantes ne contenant pas de concepts généraux non-flous paramétrés. Mais une définition mathématique simple flottante

contenant des concepts généraux non-flous paramétrés pourra être identifiée de façon évidente avec une définition non-floue paramétrée.

De même supposons qu'on a défini successivement les concepts généraux flottants $n_{1G},\ldots,n_{kG}$. x_G étant un concept général non-flou flottant défini après n_{kG}, on pourra définir $H(x_G)_{n1G,..,nkG}$ tel que si $n_{1G},..,n_{kG}$ sont simultanément identifiés avec $n_{10G},..,n_{k0G}$, $H(x_G)_{n10G,..,nk0G}$ est le concept général non-flou obtenu. $H(x_G)_{n1G,..,nkG}$ est donc aussi un concept général non-flou paramétré.

Pour démontrer la proposition initiale sur l'existence de f_G, on commence par définir le concept général non-flou flou flottant b_G associé à $D_{n1G,..,nkG}(o)$. Puis on considère $H(a_G,b_G)_{AG,BG}$.

On définit alors leconcept général non-flou flottant f_G associé à la définition mathématique simple flottante $D_{AG,BG}(o)$: «o est élément de $F(A_G,B_G)$ et « Si x est tel que x est élément de A_G, alors (x,o(x)) appartient à $H(a_G,b_G)_{AG,BG}$ » ».

De même on peut définir un concept général non-flou qu'on peut identifier avec la multiplication dans **N** et qu'on représentera par $\times_{\mathbf{N}}$. et la puissance dans **N**.

On peut aussi définir l'addition, la multiplication et la puissance dans **N** de la façon suivante qui est beaucoup plus simple :

On a vu que « Card » était une fonction-concept. On peut donc utiliser « Card(A) » dans une définition non-floue.

On définit alors facilement l'addition $+_{\mathbf{N}}$ et la multiplication $\times_{\mathbf{N}}$ dans **N** par, n et p étant 2 éléments quelconques de **N** :
n $+_{\mathbf{N}}$ p (identifié avec $+_{\mathbf{N}}((n,p))=\mathrm{Card}\ (n\mathrm{U}(p\times\{1\}))$ et $n\times_{\mathbf{N}}p=\mathrm{Card}(n\times p)$. On définit la fonction "puissance$_{\mathbf{N}}$" de façon analogue, utilisant Card(F(p,n)).

De même on définit la relation non-floue $\leq_{\mathbf{N}}$ dans **N**, par :
« $n\leq_{\mathbf{N}}p$ » est équivalent à « (n,p) est élément de $\mathbf{N}^2$ et n est inclus dans p ».
On généralise alors les définitions de $<_{\mathbf{N}},>_{\mathbf{N}},\geq_{\mathbf{N}}$ dans **N**.
(On rappelle que pour définir une relation non-floue R d'ordre de multiplicité n>1, il suffit d'utiliser une proposition du type : « R est une relation non-floue d'ordre de multiplicité n et pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, « $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie » est équivalent à « $D((O_{10},..,O_{n0}))$ est vraie », avec $D((o_1,..,o_n))$ définition générale non-floue)).

On peut alors définir la fonction $-_{\mathbf{N}}$, (appelée soustraction dans **N**) d'ensemble de départ $\mathbf{N}^2_{-\mathbf{N}}=\{(a,b)$ tel que (a,b) est élément de $\mathbf{N}^2$ et $b\leq a\}$, avec pour tout (a,b) dans $\mathbf{N}^2_{-\mathbf{N}}$, $a-_{\mathbf{N}}b=\mathrm{Card}(a/b)$.

Utilisant l'existence de l'addition, de la soustraction et de la multiplication dans **N**, il est facile utilisant le Lemme 2.18 de définir successivement des concepts généraux non-flous qu'on peut identifier avec l'addition et la multiplication dans **Z** et **Q** et qu'on notera $+_{\mathbf{Z}}, \times_{\mathbf{Z}}, +_{\mathbf{Q}}, \times_{\mathbf{Q}}$.

Par exemple $+_{\mathbf{Q}}$ sera définie par : Si (p,q) et (r,s) sont des éléments de $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}/\{0,1\})$:

$C_{\mathbf{Q}}((p,q))+_{\mathbf{Q}}C_{\mathbf{Q}}((r,s))=C_{\mathbf{Q}}((p\times_{\mathbf{Z}}s+_{\mathbf{Z}}r\times_{\mathbf{Z}}S,\ q\times_{\mathbf{Z}}s))$.

b)On montre alors facilement le b) de la Proposition 3.4 :

On identifie « l'opposé dans E de » et « la valeur absolue dans E de » avec des concepts généraux représentant des applications de E dans E de E dans E^+, avec E l'ensemble **Z** ou **Q** . On définit aisément les ensembles $\mathbf{Z}^+$ et $\mathbf{Q}^+$. $\mathbf{Z}^+$ est identifié avec $\mathbf{N}\times\{1\}$, et $\mathbf{Q}^+ = \{x$ / x est élément de **Q** et il existe y et il existe z tels que y est élément de $\mathbf{Z}^+$ et z est élément de $\mathbf{Z}^{*+}$ et $x=C_{\mathbf{Q}}(y,z)\}$

Puis à l'aide du concept général « est l'opposé dans E de » (E l'ensemble **Q** ou **Z**), on définit les concepts généraux non-flous $-_{\mathbf{Q}}$ et $-_{\mathbf{Z}}$, qui sont la soustraction classique dans **Q** et **Z**.

c)Utilisant $\mathbf{Q}^+$ et $\mathbf{Z}^+$, de même que $-_{\mathbf{Q}}$ et $-_{\mathbf{Z}}$, on généralise facilement la définition des relations non-floue $<_E,>_E,\geq_E$ et$\leq_E$ pour E= **Z** ou E=**Q** . On justifie aisément que les objets mathématiques précédents sont des relations non-floues.

On peut facilement définir utilisant l'Axiome 2.14 des ensembles $\mathbf{N_Z}$, $\mathbf{Z_Q}$, $\mathbf{N_Q}$ (avec $\mathbf{N_Q}$ est inclus dans $\mathbf{Z_Q}$) qui sont respectivement des sous-ensembles de **Z**,**Q** et **Q** et qui sont respectivement analogues à **N**,**Z**,et **N**. Par exemple $1_\mathbf{Z}=(1,1)$, $1_\mathbf{Q}=C_\mathbf{Q}((1_\mathbf{Z},1_\mathbf{Z}))$.

PROPOSITION 3.5 :

a)Il existe un concept général non-flou, **R**, ayant les mêmes propriétés que l'ensemble des réels dans les mathématiques pré-Platonistes.
b)On peut définir des concepts généraux $+_\mathbf{R}$, $-_\mathbf{R}$ et $\times_\mathbf{R}$, identifiés avec l'addition, la soustraction et la multiplication classique dans **R**.
c)Pour E=**N**,**Z**,**Q**,**R** et n naturel supérieur ou égal à 2, on peut définir E^n et $E^\mathbf{N}$.

Preuve :

a)On a déjà montré l'existence de concepts généraux non-flous **Q** et **N**, ayant les mêmes propriétés que les ensembles **Q** et **N** dans les mathématiques pré-Platonistes.
D'après la Proposition 2.17 il existe un concept général non-flou représentant un objet unique $F(\mathbf{N},\mathbf{Q})$, dont on appellera chaque élément « une suite de rationnels »(« une suite de rationnels » est donc un concept général non-flou) .

On considère alors la définition classique d'une suite de Cauchy :
$D_{Cauchy}(o)$: « o est un élément de $F(\mathbf{N},\mathbf{Q})$ et pour tout ε tel que ε est un rationnel strictement positif, il existe N tel que «N est un naturel et pour tout i tel que $i>_\mathbf{N}N$ et pour tout j tel que $j>_\mathbf{N}N$, $|o(i)-_\mathbf{Q}o(j))|_\mathbf{Q}<_\mathbf{Q}\varepsilon$ » » (On a vu o(i) est l'image de i par o) .
$D_{Cauchy}(o)$ est évidemment basique puisqu'elle contient que o est élément de $F(\mathbf{N},\mathbf{Q})$ qui est un concept général non-flou représentant un ensemble.
On va montrer maintenant que $D_{Cauchy}(o)$ est une définition mathématique simple (notion définie dans la Définition 2.5), en donnant l'interprétation Platoniste de $D_{Cauchy}(o)$ (notion définie dans la Définition 2.5). Ceci entraînera d'après l'Axiome 2.5A que $D_{Cauchy}(o)$ est non-floue, ce qui entraînera l'existence de **S** défini comme étant l'ensemble des suites de Cauchy.

On peut exprimer $D_{Cauchy}(o)$ sous la forme « o est élément de $F(\mathbf{N},\mathbf{Q})$ et pour tout ε symbole associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{aux\varepsilon}(o_\varepsilon)$: « o_ε est élément de $\mathbf{Q}^{*+}$ » il existe N tel que N est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{auxN}(o_c,o,\varepsilon)$: « o_c est élément de **N** et pour tout i symbole particulier (défini en fonction de o_c) associé à la définition auxiliaire (de niveau 1) $D_{auxi}(o_i\ ,o_c)$: « o_i est élément de **N** et $o_i >_\mathbf{N} o_c$ » et et pour tout j symbole particulier (défini en fonction de o_c) associé à la définition auxiliaire (de niveau 1) $D_{auxj}(o_j,o_c)$: « o_j est élément de **N** et $o_j >_\mathbf{N} o$ », $|o(i)-_\mathbf{Q}o(j)|_\mathbf{Q}<_\mathbf{Q}\varepsilon$ »
(On rappelle qu'on peut identifier o(i) avec Im(o,i), Im étant une fonction-concept).

Et donc dans $D_{Cauchy}(o)$ tout nouveau symbole est bien associé à une définition auxiliaire telle que définie dans la Définition 2.5. De plus il est évident que tout nouveau symbole de $D_{Cauchy}(o)$ ne peut représenter que des objets mathématiques non-relationnels et donc $D_{Cauchy}(o)$ est une définition mathématique simple et est donc non-floue. D'où l'existence de **S**.

On remarque que d'après la signification du concept primitif « il existe », si pour un O_0 et un ε $N(O_0,\varepsilon)$ n'est pas un concept particulier non-flou, alors $D_{Cauchy}(O_0)$ n'est pas vraie. Mais si O_0 est tel que pour tout ε appartenant à $\mathbf{Q}^{*+}$, $N(O_0,\varepsilon)$ est un concept particulier non-flou, alors d'après la signification du concept primitif « Pour tout », $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie.

O_0 étant un objet mathématique tel que $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie, ε pourra représenter tout ε_0 élément de $\mathbf{Q}^{*+}$, et ε représentant ε_0, N pourra représenter tout N_0 tel que $D_{auxN}(N_0,O_0,\varepsilon_0)$ est vraie. Et en accord avec la définition 2.5III, le fait que $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie est complètement déterminé par les objets pouvant être représentés par O_0,ε et N.

De plus, si $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie, dans $D_{Cauchy}(O_0)$, ε, $N(O_0,\varepsilon)$, i(N) et j(N) sont nécessairement des concepts particuliers non-flous de façon évidente.

On définit le concept général non-flou $C_{\mathbf{R}}$ pouvant représenter une unique application de S dans *P*(S), telle que pour tout s élément de S, $C_{\mathbf{R}}(s)$={r tel que r est élément de **S** et pour tout ε rationnel strictement positif, il existe un naturel N tel que pour tout i naturel supérieur à N $|r(i)-_{\mathbf{Q}}s(i))|_{\mathbf{Q}}<_{\mathbf{Q}}\varepsilon$ }

D'après l'Axiome 2.14e) $C_{\mathbf{R}}(s)$ est un ensemble défini uniquement en fonction de s.

On identifie alors **R** avec $Im(C_{\mathbf{R}})$.

On peut utilisant l'Axiome 2.14 définir des sous-ensembles $\mathbf{N_R},\mathbf{Z_R},\mathbf{Q_R}$ de **R** ayant les mêmes propriétés que **N**,**Z**,**Q**.Avec $\mathbf{N_R}$ inclus dans $\mathbf{Z_R}$ inclus dans $\mathbf{Q_R}$.

On obtient par de déductions logiques relationnelles évidentes que la suite de *F*(**N**,**Q**) dont chaque terme est égal à 1 est une suite de Cauchy. Il en résulte que « une suite de Cauchy » est bien un concept général non-flou.

b)En utilisant $+_{\mathbf{Q}},-_{\mathbf{Q}}$ et $\times_{\mathbf{Q}}$ qu'on a défini plus haut, on définit immédiatement de façon classique $+_{\mathbf{R}},-_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$.

c)Pour E=**N**,**Z**,**Q**,**R**, et n=2, on identifiera E^2 avec E×E. Pour n naturel supérieur ou égal à 3 on a justifié l'existence dans la Proposition 2.17A de *F*({1,…,n},E). On a vu qu'on avait *F*({1,..,n},E) était égal à {({1..,n},E)}×F_1({1,…,n},E), avec F_1({1,..,n},E) est un unique ensemble défini en fonction de n et E. On identifiera E^n avec cet ensemble.
De même on identifiera $E^{\mathbf{N}}$ avec F_1(**N**,E).

Si a est élément de E^n (ou de $E^{\mathbf{N}}$), par définition, pour tout i dan {1,.,n} (ou dans **N**), on aura, remarquant (({1,..,n},E),a) est un élément de *F*({1,..,n},E), a(i)=(({1,..,n},E),a)(i) , (ou a(i)=((**N**,E),a)(i)).

Si F est un ensemble inclus dans **N**, on peut généralise ce qui précède en définissant $E^F=F_1(F,E)$.

On peut généraliser ce qui précède pour F ensemble inclus dans **N**,**Z**,**Q**,**R**.

On peut prendre une définition alternative d'une suite de rationnels ou d'une suite de Cauchy (et donc de **R**) en remplaçant dans leurs définitions *F*(**N**,**Q**) par $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$.

PROPOSITION 3.6 :

a)n_G étant identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel supérieur ou égal à 3 et $O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)}$ étant des symboles particuliers non-flous, alors on peut d'après les règles syntaxiques de convention identifier $(O_{s(1)},..,O_{s(nG)})$ comme étant le symbole particulier non-flou défini par la proposition mathématique simple :
$P(O_{s(1)},..,O_{s(nG)})$: « $(O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)})$ est tel que $(O_{s(1)},..,O_{s(nG)})=\{(1,O_{s(1)}),..,(n,O_{s(nG)})\}$ »
b)Dans le cas où les $O_{s(i)}$ sont des concepts particuliers non-flous, alors $(O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)})$ est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)}$. On aura alors $(O_{s(1)},..,O_{s(nG)})$ est une séquence finie à n_G termes.

Preuve :

Ceci est une conséquence immédiate de la définition 3.2C.

PROPOSITION 3.7 :

a)Des concepts généraux non-flous pouvant être identifiés à des groupes, à des corps, à des espaces vectoriels de toute dimension, à des vecteurs existent.

b)On peut identifier **C** à un concept général non-flou, de même que l'addition, la soustraction et la multiplication dans **C**.

Preuve :

a) On a vu l'existence d'un concept général non-flou pouvant être identifié à **Q**, de même que des concepts généraux non-flous pouvant être identifiés à la multiplication et à l'addition dans **Q**, qu'on notera $\times_{\mathbf{Q}}$ et $+_{\mathbf{Q}}$.

On peut obtenir très facilement, de la même façon qu'on a obtenu la définition $D_{Cauchy}(o)$, à partir des définitions classiques des groupes commutatifs, des corps, des espaces vectoriels, des définitions générales mathématiques simples $D_{GRC}(o)$, $D_{CO}(o)$ et $D_{EV}(o)$. D'après l'Axiome 2.5A, on peut justifier que ces définitions sont non-floues en montrant successivement (Car $D_{EV}(o)$ utilise « un corps » et « un groupe ») qu'« un groupe commutatif », « un corps » et « un espace vectoriel » sont des concepts généraux non-flous, respectivement associés aux définitions $D_{GRC}(o)$, $D_{CO}(o)$ et $D_{EV}(o)$.

Chacune des 3 définitions a une interprétation Platoniste. Par exemple une interprétation Platoniste de $D_{EV}(o)$ sera la suivante (Les 2 autres étant plus simples mais s'obtiennent de la même façon. On suppose qu'on a déjà montré qu' « un groupe commutatif » et « un corps » étaient des concepts généraux non-flous) :

$D_{EV}(o)$: «o est une séquence finie à 3 termes et si E est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{aux1}(o_1,o)$: « o_1 est le premier terme de o », + est le symbole particulier (défini en fonction de o) associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{aux2}(o_2,o)$: « o_2 est le deuxième terme de o », $._{K,E}$ est le symbole particulier (défini en fonction de o) associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{aux3}(o_3,o)$: « o_3 est le troisième terme de o » », alors (E,+) est un groupe commutatif et il existe T symbole particulier associé à (la définition auxilliaire de niveau 0) $D_{auxT}(o_T, E,+,._{K,E})$,avec :

$D_{auxT}(o_T,E,+,._{K,E})$: « o_T est une séquence finie à 3 termes et si K (resp.$+_K$, resp. $\times_K$) est le symbole particulier défini en fonction de o_T associé à la définition auxiliaire interne de niveau 1 $D_{auxK}(o_4,o_T)$: « o_4 est le premier terme de o_T » (resp.$D_{aux+K}(o_5,o_T)$: « o_5 est le 2ième terme de o_T », resp.$D_{aux\times K}(o_6,o_T)$: « o_6 est le 3ième terme de o_T ») », alors « $(K,+_K,\times_K)$ est un corps commutatif et $._{K,E}$ est élément de $F(K\times E,E)$ » et pour tout α (resp.β) symbole particulier associé à la définition auxiliaire interne de niveau 1 $D_{aux7}(o_7,K)$: « o_7 est élément de K » (resp. $D_{aux8}(o_8,K)$: « o_8 est élément de K »), et pour tout x (resp.y) symbole défini en fonction de o_T associé à la définition auxiliaire interne de niveau 1 $D_{aux9}(o_9,E)$: « o_9 est élément de E » (resp. $D_{aux10}(o_{10},E)$: « o_{10} est élément de E ») ,

« $1_K ._{K,E} x=x$ (1_K élément neutre de $(K,+_K,\times_K)$) et $\alpha ._{K,E}(\beta ._{K,E} x)=(\alpha\times_K\beta) ._{K,E} x$ et $(\alpha+_K\beta) ._{K,E} x=\alpha ._{K,E} x+\beta ._{K,E} x$ et $\alpha ._{K,E}(x+y)= \alpha ._{K,E} x+\alpha ._{K,E} y$ » ».

En accord avec la définition 2.5III, O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, le fait que $D_{EV}(O_0)$ est vrai dépend seulement des objets pouvant être représentés par $E,+,._{K,E}$ et T.

De plus, si $D_{EV}(O_0)$ est vrai, alors il est évident que $E(O_0),+(O_0),._{K,E}(O_0)$ sont des concepts particuliers non-flous (car O_0 est une séquence finie à 3 termes), de même que $T(E,+,._{K,E})$ (sinon $D_{EV}(O_0)$ n'est pas vraie), $K(T),+_K(T),\times_K(T)$ (car T est une séquence finie à 3 termes), α(K), β(K) (Car K est non vide), et x(E), y(E) (car E est non-vide).

(On aurait pu à la place de définir le symbole particulier T définir le symbole particulier $(K,+_K,\times_K)$ et aussi remplacer $D_{EV}(o)$ par $D_{EV}(o_E,o_{+E},o._{K,E})$. En général on emploie la proposition mathématique simple suivante, dans laquelle les symboles particuliers définis sont définis implicitement en fonction des définitions auxiliaires :P_{EV} : « « Ev est tel que Ev est un espace vectoriel » est équivalent à « « Ev est une séquence à 3 termes » et « si $(E,+_E,._{K,E})$ est tel que $(E,+_E,.K,E)$ est identique à Ev , alors $D_{EV}(E,+_E,.K_{,E})$.» ».

«

Montrons par exemple qu'il existe au moins un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP correspondant à $D_{GRC}(o)$ et $D_{CO}(o)$ (Ce qui est nécessaire pour montrer qu' « un groupe commutatif » et « un corps » sont des concepts généraux non-flous) :

P1 :a,b,c,d sont tels que a,b,c sont éléments de **Q** et d est élement de **Q***.
P2 :$a+_{\mathbf{Q}}b=b+_{\mathbf{Q}}a$
P3 :$a+_{\mathbf{Q}} (b+_{\mathbf{Q}} c)=(a+_{\mathbf{Q}}b) +_{\mathbf{Q}}a$
P4 :$0_{\mathbf{Q}} +_{\mathbf{Q}} a=a$
P5 :Il existe a' tel que $a +_{\mathbf{Q}} a'=0$

P6 :$a\times_{\mathbf{Q}}b=b\times_{\mathbf{Q}} a$
P7 :$a\times_{\mathbf{Q}} (b+_{\mathbf{Q}} c)=a\times_{\mathbf{Q}} b+_{\mathbf{Q}} a\times_{\mathbf{Q}} c$
P8 :$(a\times_{\mathbf{Q}} b) \times_{\mathbf{Q}} c=a\times_{\mathbf{Q}} (b\times_{\mathbf{Q}} c)$
P9 :$1_{\mathbf{Q}}\times_{\mathbf{Q}} a=a$
P10 :Il existe d' tel que $d'\times_{\mathbf{Q}} d=1_{\mathbf{Q}}$

P11 :$D_{GRC}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}}))$ est vraie.

P12 :$D_{CO}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}}, \times_{\mathbf{Q}}))$ est vraie.

Dans les déductions logiques relationnelles précédentes, P1 définit les concepts particuliers non-flous, a,b,c,d. Puis P1,..,P10 peuvent être identifiées d'après l'Axiome 2.5 à des propositions mathématiques simples vraies de façon évidente. P11 et P12 sont alors des déduction logiques relationnelles évidente considérant $D_{GR}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}}))$ et $D_{CO}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}},\times_{\mathbf{Q}}))$.

On peut définir classiquement une fonction $+_{\mathbf{Q3}}$ de $\mathbf{Q}^3\times\mathbf{Q}^3$ dans $\mathbf{Q}^3$ et une fonction $\cdot_{\mathbf{Q,Q3}}$ de $(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}^3)$ dans $\mathbf{Q}^3$ tel que $D_{EV}((\mathbf{Q}^3,+_{\mathbf{Q3}}, \cdot_{\mathbf{Q,Q3}}))$ soit vraie.

$(E,+_{E},\cdot_{K,E})$ étant un espace vectoriel, on dira qu'un élément de E est un *vecteur* de $(E,+_{E},\cdot_{K,E})$. On trouve aisément une définition mathématique simple permettant de justifier qu'*un vecteur* peut être identifié à un concept général non-flou et qu' « *est un vecteur de l'espace de l'espace vectoriel* » peut être identifiée avec une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 pouvant exister entre un vecteur et un espace vectoriel.

Ce qui précède justifie qu' « un groupe commutatif », « un corps », « un espace vectoriel » sont des concepts généraux non-flous de la TMP, ayant les mêmes propriétés que dans les mathématiques classiques. On peut de la même façon identifier l'ensemble des concepts des théories mathématiques classiques avec des concepts généraux non-flous de la TMP.

b)On a vu qu'on pouvait définir dans la TMP des concepts généraux non-flous représentant l'addition et la multiplication dans **R**, notées $+_{\mathbf{R}}$, $-_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$. On peut alors définir un concept général non-flou représentant l'addition dans $\mathbf{R}^2$ notée $+_{\mathbf{R2}}$. Dans la TMP on identifie **C** au concept général non-flou $\mathbf{R}^2$. On identifie l'addition dans **C**, notée $+_{\mathbf{C}}$ avec le concept général non-flou $+_{\mathbf{R2}}$ défini précédemment. A l'aide des concepts généraux $+_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$, on identifie la multiplication dans **C** avec un concept général non-flou $\times_{\mathbf{C}}$ représentant un unique objet (application de **C**×**C** dans **C**).

a et b étant deux élément de **R**, on pourra identifier $a_{\mathbf{C}}$ avec l'élément de **C** (a,0), et ib avec l'élément de **C** (0,b). On identifiera donc $a_{\mathbf{C}}+_{\mathbf{C}}ib$ avec l'élément de **C** (a,b).

D'après ce qui précède, un élément de $\mathbf{R}^2$ pourra donc être considéré comme un vecteur, un nombre complexe ou comme on le verra plus loin un point du plan Euclidien.

3.8 PLAN EUCLIDIEN

On identifiera dans la TMP le *plan Euclidien* avec l'ensemble $P= \mathbf{R}^2$, on appellera alors «*points du plan Euclidien*» les éléments de $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2$ étant considéré comme le plan Euclidien. « une *droite du plan Euclidien* » sera identifié avec à un concept général non-flou représentant des sous-ensembles particuliers de *P*, (Défini par une définition mathématique simple utilisant $+_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$) et « *est parallèle dans le plan Euclidien à* » à une relation non-floue pouvant exister entre 2 droites du plan Euclidien. A,B étant 2 points du plan Euclidien, on identifiera le vecteur **AB** avec $F_{vp}((A,B))$, F_{vp} étant une fonction-concept telle que $Dep(F_{vp})$ peut représenter tous les couples de points du plan Euclidien,

et $F_{vp}((A,B))$ est égal au vecteur de $(\mathbf{R}^2,+_{\mathbf{R2}},._{\mathbf{R},\mathbf{R2}})$ $(x_B -_{\mathbf{R}} x_A, y_B -_{\mathbf{R}} y_A)$.De même, on identifiera le segment [A,B] avec $F_{SGP}((A,B))$, F_{SGP} étant une fonction-concept.

Dans la TMP, la *distance dans le plan Euclidien* d_{PE} sera identifiée avec un concept général non-flou pouvant représenter (classiquement) une unique fonction de P^2 dans $\mathbf{R}^+$. La *norme vectorielle dans le plan Euclidien* n_{PE} pourra aussi être identifiée avec un concept général non-flou pouvant représenter (classiquement) une unique fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^+$. Dans la TMP, « *Un cercle dans le Plan Euclidien* », « *un triangle dans le Plan Euclidien* » seront identifiés avec des concepts généraux non-flous pouvant représenter certains sous-ensembles de *P*. Le *produit scalaire dans le Plan Euclidien* pourra aussi être identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter (classiquement) une unique fonction de $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ .Une *distance*, *une norme* pourront être identifiées avec des concepts généraux non-flous. A partir de leur définition classique, on trouve aisément les définitions mathématiques simples associées aux concepts généraux non-flous précédents. Les Axiomes d'Euclide, le Théorème de Thalès généralisé et sa réciproque, le Théorème de Pythagore apparaissent alors comme des théorèmes de la TMP, c'est-à-dire des déductions logiques relationnelles dans la TMP des définitions précédentes. Le produit scalaire dans le Plan Euclidien permettant de définir les concepts généraux non-flous « un *triangle rectangle dans Plan Euclidien* » et « *un angle droit dans le Plan Euclidien* »). On a donc montré qu'il existe dans la TMP des objets mathématiques vérifiant complètement les Axiomes d'Euclide. On pourra généraliser ceci en identifiant l'espace géométrique à 3 dimensions de même que les surfaces de la géométrie Riemannienne à des objets mathématiques de la TMP.

3.9 FONCTIONS-CONCEPT RECURSIVES

a)On peut définir une fonction-concept *F*,dite *fonction-concept récursive*, de la façon suivante :
On suppose :
-Qu'on a une définition mathématique simple générale (et donc non-floue) $P_{rF}(o)$ dite *propriété récursive associée* à *F*.
-Que A_1 et A_2 étant les symboles particuliers associés à $P_{rF}(o)$, A_1 et A_2 sont des concepts-particuliers non-flous.
-Qu'on a une définition mathématique simple (et donc non-floue) $D_{rF}(o,A_1,A_2)$, dite *définition récursive associée* à *F* et telle que si A_3 est le symbole particulier non-flou associée à cette définition, A_3 est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de A_1,A_2 et de plus que tout objet A_{30} pouvant être représenté par A_3 correspond à $P_{rF}(o)$. (Ce qui est équivalent $P_{IF}(A_3)$ est vraie).

Alors par définition, le concept de départ de *F* pourra représenter :
-Tout couple $(1,a_{10})$, avec a_{10} correspond à $P_{rF}(o)$.
-Tout couple $(n,(a_{10},..,a_{n0}))$, avec n naturel strictement supérieur à 1 et $a_{10},..,a_{n0}$ correspondent à $P_{rF}(o)$.

On aura alors avec les notations précédentes, par définition d'une fonction-concept récursive :
$F((1,a_{10}))=a_{10}$.
Et pour i supérieur ou égal à 1, $F((i+1,(a_{10},.,a_{i+10}))$ sera défini par récursivité par :
$D_{rF}(F((i+1,(a_{10},.,a_{i+10})), F((i,(a_{10},.,a_{i0})),a_{i+10})$

On admet axiomatiquement comme évident qu'on a bien défini une fonction-concept.

(On peut utiliser la fonction-concept F_C telle que $F_C((i+1,(a_{10},.,a_{i+10}))=(i,(a_{10},.,a_{i0}))$, identifiant « (a_{10}) » avec « a_{10} », et la fonction-concept F_D telle que $F_D((i,a_{10},..,a_{i0}))=a_{i0}$. *F* est alors formellement défini par : « Pour tout t tel que t est élément de Dep(*F*) et t(1)>1, $D_{rF}(F(t), F(F_C(t)),F_D(t))$.

b)Par exemple, on pourra définir la fonction-concept récursive *sommation multiple de réels* $F_{\Sigma R}$ en définissant la propriété récursive et la définition récursive associées :
$P_{\Sigma R}(o)$: « o est élément de $\mathbf{R}$ »
$D_{\Sigma R}(F_{\Sigma R}(i+1, (a_{10},..,a_{i+10})), F_{\Sigma R}(i, (a_{10},..,a_{i0})) ,a_{i+10}))$:
« $F_{\Sigma R}(i+1, (a_{10},..,a_{i+10}))= F_{\Sigma R}(i, (a_{10},..,a_{i0})+_{\mathbf{R}}a_{i+10}$ ».

c)Dans certains cas il sera nécessaire d'introduire des concepts généraux flottants $A_{1G},..,A_{kG}$. Ce sera par exemple le cas si on veut définir une fonction-concept F_{comp}, telle que $b_1,\ldots,b_n$ étant des bijections d'un ensemble A_G dans un ensemble A_G, $F_{comp}((b_1,.,b_n))=b_1 o\ldots o b_n$.

On commencera par obtenir une fonction-concept récursive flottante $F_{A1G,..,AkG}$. (C'est-à-dire que pour tous $A_{10G},..,A_{k0G}$ auxquels on peut identifier simultanément $A_{1G},..,A_{kG}$, $F_{A10G,..,Ak0G}$ est une fonction-concept récursive). Puis on définira le concept particulier non-flou paramétré $x_{A1G,..,AkG}$ défini par :
«$x_{A1G,..,AkG}$ est tel que $x_{A1G,..,AkG}$ appartient à Dep($F_{A1G,..,AkG}$). »
On considère alors ($F_{A1G,..,AkG}(x_{A1G,..,AkG})$, ($A_{1G},\ldots,A_{kG}$, $x_{A1G,..,AkG}$))sans paramètres fixes qui est un concept général non-flou paramétré noté $C_{A1G,..,AkG}$.
On définit alors la fonction-concept F en l'identifiant avec $C_{A1G,..,AkG}$ *sans paramètres flottants fixes*. (Définis de façon analogue à $O(O_1,..,O_k)$ sans paramètres fixes, $O(O_1,..,O_k)$ concept particulier non-flou).

On pourra utiliser cette méthode pour définir des compositions multiples de bijections dans un ensemble quelconque, mais aussi des sommations ou des multiplications multiples dans des anneaux ou corps quelconques.

3.10 GROUPE RESOLUBLE-INTEGRALE DE RIEMANN.

Un groupe resoluble sera defini comme une concept general non-flou associé à la definition mathématique simple générale $D_{GR}(o_G)$: « o_G est un groupe et il existe (G,n) tel que $D_{aux1}(G,n,o_G)$: « n est un élément de **N*** et G est une séquence finie sur {0,..,n} et « si i est tel que i est élément de {0,..,n} alors G(i) est un groupe » et $G(0)=o_G$ et $G(n)=e_G(o_G)$ et « si h est tel que h est élément de {0,..,n-1} alors « G(h+1) est un sous-groupe distingué de G(h) et G(h)/G(h+1) est un groupe commutatif » » » ».

Dans la définition précédente on identifie $e_G(o_G)$ avec $F_{en}(o_G)$, F_{en} fonction-concept de concept de départ « un groupe » et d'après les règles syntaxiques de convention G(h)/G(h+1) avec F_{GQ}(G(h),G(h+1)), F_{GQ} fonction-concept. On identifie aussi {0,..,n} et {0,..,n-1} avec F_{sf}(0,n) et F_{sf}(0,n-1), F_{sf} fonction-concept.
D'après les règles syntaxiques de convention, G étant une séquence finie indexée sur un ensemble, on identifie G(h) avec im_s(G,h), im_s étant une fonction-concept.
On définit aussi aisément la relation non-floue « est un sous-groupe distingué de ».

On pourra identifier « l'intégrale de Riemann » avec une fonction-concept notée F_{intRi}, dont le concept de départ pourra représenter toutes les séquences (a,b,f) avec a et b réels, a<b et f application Riemann intégrable de [a,b] dans **R**.

D'après les règles syntaxiques de convention, a, b étant des réels avec a<b et f une fonction de [a,b] dans R, on identifiera « $\int_a^b f(x)dx$ » avec F_{intRi}(a,b,f).

3.11. FONCTION-CONCEPT ASSOCIEE A UN CONCEPT PARTICULIER NON-FLOU PARAMETRE.

Supposons qu'on ai défini un concept particulier non-flou O associé à une définition non-floue $D(o,O_1,..,O_n)$ avec O défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_n$. D'après les règles syntaxiques de convention, O aura la même signification que $O(O_1,..,O_n)$ défini comme étant le symbole particulier non-flou associé à $D(o,O_1,..,O_n)$. De plus, d'après les règles syntaxiques de convention si on a défini ainsi $O(O_1,..,O_n)$, alors on pourra définir la fonction-concept F_O de concept de départ $(O_1,..,O_n)$sans paramètre fixes et telle que si $(x_{10},..,x_{n0})$ appartient à Dep(F_O), $F_O(x_{10},..,x_{n0})$ soit défini par $D(F_O(x_{10},..,x_{n0}),x_{10},..,x_{n0})$.

De plus d'après les règles syntaxiques de convention, $x_1,..,x_n$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, $O(x_1,..,x_n)$ aura alors la même signification que $F_O(x_1,..,x_n)$.

3.12. PREUVE PAR RECURRENCE PARAMETREE

On suppose qu'on a des concepts particuliers non-flous $O_1,..,O_k$ et qu'on définisse les concepts généraux flottants $O_{1G},..,O_{kG}$ par $(O_{1G},..,O_{kG})$ appartient à $(O_1,..,O_k)$ sans paramètres fixes.

Si on a alors une proposition mathématique simple générale $P(O_{1G},..,O_{kG},n_G)$, avec $O_{1G},..,n_G$ concepts généraux flottants avec n_G peut être identifié avec tout n_{0G}, n_0 naturel quelconque et qu'on a montré $P(O_{1G},..,O_{kG},0)$ est vraie de même que , n étant défini par « n est tel que n est élément de **N** », « Si $P(O_{1G},.,n)$, alors $P(O_{1G},..,s_N(n)$ », alors $P(O_{1G},..,O_{kG},n_G)$ est vraie (preuve par récurrence). Il en résulte qu'on a la même propriété remplaçant $O_{1G},..,n_G$ par des concepts particuliers non-flous $O_1,..O_k,n$. (*preuve par récurrence paramétrée*).

4.CONCLUSION

Nous avons dans cet article exposé les bases d'une Théorie Mathématique Platoniste (TMP). On a vu en Introduction que le concept primitif « existe », dans la proposition « O_0 existe dans l'EMP », avait une première signification intuitive qui était celle qu'elles ont dans les théories mathématiques classiques, et une seconde signification dans la TMP qui signifiait *existe dans une réalité abstraite*, de la même façon que les cercles et les droites existent dans le plan Euclidien dans la théorie philosophique du Platonisme.

On a donné les méthodes permettant de justifier théoriquement que les concepts mathématiques classiques peuvent être identifiés à des objets mathématiques existant dans l'Espace Mathématique Platoniste. On a donc justifié théoriquement l'existence Platoniste de ces concepts mathématiques classiques. Il est remarquable qu'on obtient l'existence de ces concepts mathématiques classiques à partir de l'ensemble vide. La TMP des ensembles apparaît consistante en résolvant les Paradoxes de Cantor et de Russel grâce à l'Axiome 2.14e). On a introduit le concept fondamental de définition non-floue, et admis l' Axiome 2.5A permettant de justifier qu'une définition est non-floue.

Nous verrons dans un second article que la TMP donne une interprétation théorique Platoniste à l'ensemble des mathématiques classiques. Pour cela on établira une Logique Platonicienne des propositions de la TMP. La TMP est complètement nouvelle puisque bien qu'il existe beaucoup de théories philosophiques sur le Platonisme (voir les Références) et que la plupart des mathématiciens ont l'idée d'une signification Platoniste des mathématiques, une Théorie mathématique Platoniste et consistante s'appliquant à l'ensemble des mathématiques n'a jamais été proposée.

Références :

1.Nagel, Newman,Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
2. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionnary (G.B, 1989)
3. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
4. Largeault, Logique Mathematiques, Armand Colin,(Paris ,1992)
5. P.Thiry, Notions de logique,Deboeck Université,(Bruxelles ,1998)
6..Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)
7.Thierry Delort, Logique Platonicienne des propositions, Théories d'or 10e édition, Editions Books on Demand, Paris (2020).

Article:LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS
Auteur:Thierry DELORT
Date :Aout 2020
Extrait du livre : Théories d'or 10e édition, Editions Books on Demand, Paris (2020).

Résumé :

Dans un premier article [(1)], nous avons exposé les bases d'une Théorie Mathématique Platoniste (TMP), en montrant comment par cette théorie on pouvait obtenir l'existence au sens Platoniste des concepts mathématiques de base (**N**,**Q**,**R**, les espaces vectoriels…)

Dans ce second article, on montre comment la TMP permet d'interpréter l'ensemble des théories mathématiques de façon Platoniste. Pour cela on expose une Théorie de Logique Platonicienne (TLP) qui est la partie logique de la TMP .On montre que la TLP donne des justifications théoriques à des Lemmes correspondant au Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction de la théorie classiquement admise de logique formelle, ainsi qu'à la consistance des théories mathématiques classiques. De plus on verra que la TLP donne une interprétation de Platoniste de l'ensemble des théories basées ou utilisant les mathématiques, notamment l'ensemble des théories physiques.

Nous voyons donc dans ce second article que la TMP permet d'interpréter l'ensemble des théories mathématiques ou basées sur les mathématiques.

Mots clés : Logique - Platonisme - Principe du Tiers-exclu - Principe de Non-contradiction.

1.INTRODUCTION

Dans un article précédent [(1)], on a exposé les bases d'une Théorie Mathématique Platoniste (TMP), de logique et des fondations des mathématiques.

Dans cet article, nous montrons comment la TMP peut interpréter l'ensemble des théories mathématiques. Pour cela on expose une Théorie de Logique Platonicienne (TLP) qui est la partie logique de la TMP, en donnant une interprétation Platoniste à toutes les théories mathématiques classiques ainsi qu'aux propositions usuelles et aux démonstrations mathématiques. Nous verrons que cette interprétation est totalement nouvelle et qu'elle donne une justification théorique nouvelle à des lemmes de la TLP qui sont analogues aux Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction, ces derniers étant admis dans les théories classiques de logique basées sur le formalisme. Elle donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques.

On rappelle l'Axiome fondamental de la TMP :

AXIOME 1.1 :

a) « α est *un objet mathématique* » est équivalent à « α existe dans l' *Espace mathématique Platonique* (EMP) ».

b)Si α est un objet mathématique alors α est un *objet mathématique relationnel* ou (exclusif) un *objet mathématique non-relationnel* ou (exclusif) un *objet mathématique non-relationnel mixte*.

c)Il existe un et un seul objet mathématique non-relationnel α tel que α est l' Espace Mathématique Platonique.

On rappelle que dans un premier article [(1)] , on a défini les symboles particuliers non-flous et les concepts particuliers et généraux non-flous. On a aussi défini l'ensemble des naturels **N** dans la TMP, ainsi que les séquences finies et aussi les relations non-floues d'ordre de multiplicité n (n naturel

quelconque) et les relations mixtes non-floues. On a vu que toute relation non-floue était une relation mixte non-floue mais que la réciproque n'était pas vraie et qu' « une relation mixte non-floue » avait la même signification qu' « un objet mathématique relationnel ».

REMARQUE 1.2 :

a)On a vu dans le 1ier article 3 façons de définir un concept général non-flou :

-La première possibilité est de la définir par des définitions axiomatiques partielles, qui sont en général équivalentes à des propositions mathématiques simples ce qui est presque seulement utilisé pour définir les concepts généraux des fondations des mathématiques (un ensemble, l'EMP, une relation floue, un couple…)

-La 2ième possibilité est de le définir en l'associant à une définition générale (c'est-à-dire n'utilisant pas de concepts particuliers pré-définis) non-floue D(o) (ou $D(o_1,..,o_n)$). On pourra donc utiliser la proposition :

« « un C1 » est un concept général non-flou et « Si O est tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, « O est un C_1 » est équivalent à « D(O) ».

-Il existe une 3ième possibilité :

$O(O_1,..,O_n)$ étant un concept particulier non-flou, on a défini dans le 1ier article le symbole « $O(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes » et on a montré qu'il était un concept général non-flou. On pourra donc définir un concept général non-flou à partir de tout concept particulier non-flou.

On remarque cependant qu'on ne peut définir complètement un concept général non-flou « un C_1 » en utilisant seulement une proposition mathématique simple, puisque « un C_1 est un concept général non-flou » ne peut pas être utilisé par une proposition mathématique simple.

b)Pour définir une relation non-floue R, on procède comme suit :

On considère une définition générale non-floue $D(o_1,…,o_n)$. On définit alors une relation non-floue R d'ordre de multiplicité n par la proposition :

« R est une relation non-floue d'ordre de multiplicité n et pour tous $O_1,..,O_n$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, $R(O_1,..,O_n)$ est équivalent à $D(O_1,..,O_n)$ ».

On ne peut pas définir complètement une relation non-floue R par une proposition mathématique simple puisque « R est une relation non-floue » ne peut pas être utilsé par une proposition mathématique simple.

2.THEORIE DE LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS

THEOREME 2.1 :

R_1 et R_2 étant des relations mixtes non-floues et O_{10} et O_{20} étant des objets mathématiques quelconques, on a chacune des 3 propositions « $Non(R_1(O_{10}))$ », « $R_1(O_{10})$ et $R_2(O_{20})$ », « $R_1(O_{10})$ ou $R_2(O_{20})$ » est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

Preuve :

Pour justifier le Théorème précédent on écrit les tables de vérité correspondant à chacune des 3 propositions, analogues aux tables de vérité utilisées en logique formelle. On remarque que la 1ière table a 2 cases, et les 2 autres ont chacune 4 cases. Les cases représentent tous les cas possibles. Dans

chaque case on met V_{ex} pour « vraie exclusivement » et F_{ex} pour « n'est pas vraie exclusivement ». D'après la signification des concepts primitifs « Non », « et », « ou » ces tables sont analogues à celles en logique formelle, avec V_{ex} ou F_{ex} dans chaque case ce qui prouve le théorème.

REMARQUE 2.2 :

Une conséquence du Théorème précédent est que $R_1,..,R_k$ étant des relations non-floues d'ordre respectif m(1),..,m(k), utilisant ces relations et les concepts primitifs « et », « ou », « Non », on peut définir une multitude de relations. Mais celles-ci ne sont pas en général des relations non-floues mais des relations mixtes non-floues. Par exemple, R_1 étant une relation non-floue, si on définit R_2 par : R_2 est un objet mathématique relationnel tel que pour tout objet mathématique O_0, « « $R_2(O_0)$ » est vraie » est équivalent à « « Non($R_1(O_0)$) » est vraie », R_2 n'est pas une relation non-floue car $R_2(O_0)$ est vraie pour O_0 objet mathématique relationnel. Mais on a cependant R_2 est une relation mixte non-floue d'après le Théorème précédent.

Cependant, si on obtient une relation mixte non-floue notée R_m en utilisant $R_1,.,R_k$ et les concepts primitifs « et », « ou », « Non », on peut obtenir une relation non-floue qui est la restriction de R_m aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, notée R_{mNF}, telle que pour tout O_0 objet mathématique, « « R_{mNF} (O_0) » est vraie » est équivalent à « « O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et $R_m(O_0)$ » est vraie ».

De même, n étant un naturel quelconque supérieur ou égal à 2, on peut obtenir la restriction de R_m aux séquences finies à n termes notée $R_{mNF(n)}$ qui est une relation non-floue d'ordre de multiplicité n.

DEFINITION 2.5 :

R étant une relation d'ordre de multiplicité n (n>1), on pourra définir la *base* de R comme un concept général non-flou ($c_1,..,c_n$) représentant des séquences de n objets. Alors pour tous objets mathématiques $O_{10},.,O_{n0}$ $R(O_{10},..,O_{n0})$ ne peut être vraie que si la séquence ($O_{10},..,O_{n0}$) appartient à ($c_1,..,c_n$). Si on ne précise pas la base de R, celle-ci sera le concept général non-flou « une séquence finie à n termes ».

EXEMPLE 2.6 :

On pourrait par exemple considérer que la relation non-floue « est élément de » aura comme base le concept général non-flou (c_1,c_2) associé à la définition générale non-floue $D(o_1,o_2)$: « o_1 est un objet mathématique relationnel différent de l'EMP et o_2 est un ensemble ».

DEFINITION 2.7 :

a)On appellera *proposition élémentaire Platoniste stable de type relation* une expression P_{el} du type :P_{el} :$R(O_1,..,O_n)$ telle que :

(i) R est un concept relationnel général représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité n.

(En général R est définie en utilisant des concepts généraux non-flous ou des concepts généraux relationnels représentant chacun une relation non-floue. R pourra partiellement définir ceux-ci.)

(ii)$O_1,\dots,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous définis avant P ou des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP (**N**,**Q**,**R**…).

On remarque que O_{i0} étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, on peut remplacer O_i par O_{i0}, en définissant le concept général non-flou C_i pouvant représenter l'unique objet O_{i0}, et en remplaçant O_i par C_i. On identifie alors C_i avec O_{i0}. On peut aussi identifier O_{i0} avec le

concept particuler non-flou prédéfini O_i associé à la définition D(o) : « o appartient au concept général C_i ».

b)P_{el} étant une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation P_{el} :$R(O_1,..,O_n)$:

On dira que « P_{el} est *vraie* » si :

Pour toute séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_1,..,O_n)$, on a $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie.(Ce qui entraîne $(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes est un concept général inclus dans la base $(c_1,..,c_n)$ de R).

On dira que « P_{el} est *fausse* » si P_{el} n'est pas vraie.

c)Si P_{el} est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, on dira que la *négation* de P_{el}, notée Non(P_{el}), est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, avec « Non(P_{el}) vraie » est équivalent à « P_{el} fausse » et « Non(P_{el}) » fausse est équivalent à « P_{el} vraie ».

D'après la définition précédente, si une proposition élémentaire Platoniste de type relation $R(O_1,..,O_n)$ est vraie, elle est bien équivalente à des relations non-floues entre des objets mathématiques qui sont vraies, plus précisément à toutes les relations non-floues entre des objets mathématiques de la forme $R(O_{10},\ldots,O_{n0})$ qui sont vraies, $O_1,..,O_n$ pouvant représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$.

REMARQUE 2.8:

Par exemple si on a une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation P_{el} :$R(O_1,..,O_n)$, où O_1 est un symbole non-flou associé à une définition générale non-floue D_1(o) et ne peut représenter aucun objet mathématique, alors P_{el} n'est pas une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation. On ne dira donc pas qu'elle est *fausse*, car d'après la définition précédente seules les propositions élémentaires stables peuvent être fausses.

DEFINITION 2.9 :

On appellera *Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition* une expression du type :
P_{Def} :
$Def(O_1,..,O_i)$
$R(O_1,\ldots,O_n)$

Telle que :

(i) R est définie comme dans le cas d'une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation.

(ii) Si n>i, $O_{i+1},..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous associés à des définitions, définis avant P_{Def} ou des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP (**N**,**Q**,**R**…)

(iii) $O_1,..,O_i$ sont des nouveaux symboles.

DEFINITION 2.10:

a)Si on a une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition:

P_{Def} :
$Def(O_1,..,O_i)$
$R(O_1,..,O_n)$.

On dira que P_{Def} est *vraie* si on a :

Si $O_{i+1},..,O_n$ représentent simultanément $O_{i+10},..,O_{n0}$, alors il existe $O_{10},..,O_{i0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP tels que $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie.

Si P_{Def} est vraie, alors par définition si $O_{i+1},..,O_n$ représentent simultanément $O_{i+10},.,O_{n0}$ alors $(O_1,..,O_i)$ pourra représenter toute séquence $(O_{10},..,O_{i0})$ telle que $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie et $O_{10},..,O_{i0}$ sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

On dira alors , en accord avec la définitition d'un concept particulier non-flou donnée dans le 1ier article (1), que $(O_1,.,O_i)$ de même que $O_1,..,O_i$, sont des *symboles particuliers non-flous* qui sont des *concepts particuliers non-flous*. Ceux -ci ne peuvent représenter ni l'EMP ni in objet mathématique qui n'est pas un objet mathématique non-relationnel.

b)On dira que P_{Def} est *fausse* si P_{Def} est une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition et n'est pas vraie.
On dira alors que $O_1,..,O_i$ sont des symboles particuliers non-flous qui ne sont pas des concepts particulier non-flous. De plus, $O_1,.,O_i$ ne pourront alors représenter aucun symbole.

REMARQUE 2.11 :

a)D'après la définition précédente, si on a une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition P_{Def} :$Def(O_1,..,O_i),R(O_1,..,O_n)$ avec pour $j>i$ un symbole particulier non-flou O_j qui n'est pas un concept particulier non-flou alors P_{Def} n'est pas une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition.

b)D'après la définition précédente, si une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition P_{Def} :$Def(O_1,..,O_i),R(O_1,..,O_n)$ est fausse alors toute proposition élémentaire Platoniste postérieure à P_{Def} utilisant l'un des symboles $O_1,..,O_i$ est instable et donc n'est pas vraie.

c)D'aprés les définitions précédentes, une proposition élémentaire Platoniste stable ne pourra pas utiliser des symboles particuliers non-flous prédéfinis qui ne sont pas des concepts particuliers non-flous. Elle pourra cependant être stable en utilisant des symboles particuliers non-flous qu'elle définit elle-même. C'est le cas d'une proposition élémentaire de type définition stable qui est fausse.

On admet comme conséquences immédiates des définitions précédentes des propositions élémentaires de type relation et de type définition , utilisant que si $O_1,\ldots,O_n$ sont des concepts non-flous, alors $O_{10},..,O_{n0}$ étant des objets mathématiques quelconques, « $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$ » ou (exclusif) « $O_1,..,O_n$ ne peuvent représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$ » (Ce qu'on a démontré dans l'article précédent (1)) :

LEMME 2.12 :

a)Toute proposition élémentaire Platoniste stable de type relation est non-floue, c'est-à-dire est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

b) Toute proposition élémentaire Platoniste stable de type définition est non-floue, c'est-à-dire est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

Preuve :

Préambule : Pour démontrer ce lemme, on utilisera l'Axiome suivant, qui est la conséquence de la signification des concepts primitifs « Il existe » et « Pour tout » :
« Si R est une relation non-floue d'ordre de multiplicité k, alors les propositions P1 :« Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{k0}$, $R(O_{10},.,O_{k0})$ » et P2 : « Il existe $O_{10},.,O_{k0}$ tels que $R(O_{10},..,O_{k0})$ » sont non-floues.

On rappelle qu'$O_1,.,O_k$ étant des concepts particuliers non-flous on a démontré dans l'article [(1)] que $(O_1,..,O_k)$ *sans paramètres fixes* était un concept général non-flou.

a)Considérons une proposition élémentaire stable de type relation P_{elR} :$R(O_1,..,O_n)$.
On a « P_{elR} est vraie » est équivalent à « Pour tous objets mathématiques $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ». Cette proposition est équivalente à « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},.,O_{n0}$, si $(O_{10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes, alors $R(O_{10},..,O_{n0})$ ».

D'après la signification du concept primitif « si..alors », la proposition précédente peut se mettre sous la forme : « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{n0}$, $R_2(O_{10},.,O_{n0})$ », avec R_2 relation non-floue d'ordre de multiplicité n. Utilisant l'Axiome du Préambule, on obtient bien que la proposition précédente est non-floue, donc P_{elR} est non-floue, on a donc montré le a).

b)Considérons la proposition élémentaire stable de type définition P_{elD} :Def$(O_1,..O_i)$, $R(O_1,.,O_n)$.
Supposons n>i.
« P_{elD} est vraie » est équivalent à « Pour tous $O_{i+10},.,O_{n0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, si $(O_{i+10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_{i+1},..,O_n)$ sans paramètres fixes, alors il existe $O_{10},.,O_{i0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP tels que $R(O_{10},.,O_{n0})$ ».

Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},..,O_{n0}$, on définit la relation non-floue $R_{3(Oi+10,..,On0)}$ d'ordre de multiplicité i, tels que pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{i0}$, $R_{3(Oi+10,..,On0)}(O_{10},..,O_{i0})$ est équivalent à $R(O_{10},..,O_{n0})$. ($R_{3(Oi+10,..,On0)}$ est évidemment une relation non-floue puisque R est une relation non-floue).

On a donc « P_{elD} est vraie » est équivalent à « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},.,O_{n0}$, , si $(O_{i+10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_{i+1},.,O_n)$ sans paramètre fixe, il existe $O_{10},.,O_{i0}$ tels que $R_{3(Oi+10,..,On0)}(O_{10},..,O_{i0})$ ».

Et donc d'après l'Axiome du Préambule, il existe une relation non-floue R_4 d'ordre de multiplicité n-i telle que « P_{elD} est vraie » est équivalent à : « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},.,O_{n0}$, si $(O_{i+10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_{i+1},.,O_n)$ sans paramètre fixe, alors $R_4(O_{i+10},.,O_{n0})$ ».

Et donc d'après la signification du concept primitif « si..alors », « P_{elD} est vraie » est équivalent à « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},.,O_{n0}$, $R_5(O_{i+10},..,O_{n0})$ », avec R_5 relation non-floue d'ordre de multiplicité n-i. Utilisant l'Axiome du Préambule, on obtient que P_{elD} est non-floue.

(Le cas où n=i se traite exactement de la même façon).

On a donc démontré le lemme.

DEFINITION 2.15 :

a)On appellera *proposition stable Platoniste* P une séquence finie (*ensembliste*) $(P_1,..,P_k)$ de propositions élémentaires Platonistes (de type définition ou relation) stables, celles-ci pouvant utiliser des concepts particuliers non-flous définis avant P, et P_j pouvant aussi utiliser des concepts particuliers non-flous prédéfinis (c'est à dire définis dans $(P_1,\ldots,P_{j-1})$, ou des symboles particuliers non-flous définis dans P_j . On supposera toujours implicitement que $(P_1,..,P_k)$ est une *séquence finie ensembliste*, c'est-à-dire qu'elle est identique à l'ensemble $\{(1,P_1),..,(k,P_k)\}$. Donc à partir d'une séquence à 3

termes, séquence finie et séquence finie ensembliste auront même signification et une séquence finie ensembliste pourra n'avoir qu'un terme.

b)On dira qu'une proposition stable Platoniste P :(P_1,..,P_k) est est *vraie* si P_1,..,P_k sont toutes vraies et que P est *fausse* si P n'est pas vraie, c'est-à-dire au moins une des propositions P_1,..,P_k est fausse.

c)Si P est une proposition Platoniste stable, on définit la *négation* de P, notée Non(P), telle que « Non(P) est *vraie* » signifie « P est fausse », « Non(P) est *fausse* » signifie « P est vraie ». On dira aussi que Non(P) est une proposition Platoniste stable.

d)Si P1 et P2 sont des propositions Platonistes stables et que les mêmes propositions définissent les concepts particuliers non-flous prédéfinis utilisés par P1 et P2 , alors par définition « P1 ou P2 » et « P1 et P2 », « Non(P1) » sont aussi des *propositions Platonistes stables*.appelées aussi *propositions Platonistes stables composées*. Si P(O_1,..,O_n) est une proposition stable composée, O_{10},..,O_{n0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on obtiendra les valeurs de vérité de P(O_{10},..,O_{n0}) en utilisant les tables de vérité classiques. Par définition, de la même façon que pour une propostion mathématique simple, P(O_1,..,O_n) sera vraie si pour tous O_{10},..,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n , P(O_{10},..,O_{n0}) est vraie. On rappelle qu'on a introduit les concepts primitifs et_G, ou_G, Non_G…Leur utilisation dans une proposition Platoniste sera analogue à celle de et, ou, Non… Par abus de language, on pourra cependant utiliser parfois « et », ou « Non », à la place de « et_G », « ou_G », « Non_G »...

On montre sans difficultés que la définition donnée en a) d'une proposition stable Platoniste la séquence ensembliste (P_{el1},..,P_{elk}) vraie utilisant les concepts particuliers non-flous pré-définis O_1,..,O_n est équivalente à la précédente (en d)).

Pour cela, on considère les propositions Q_1 et Q_2 suivantes :
Q_1 : « P(O_1,..,O_n) est vraie (au sens du a)) » , Q_2 : « Pour tous O_{10},..,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n, P(O_{10},..,O_{n0}) est vraie (au sens du a). »

On justifiera plus loin Q_1 est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, de même que Q_2. On montrera ensuite « Si Q_1 alors Q_2 » et « Si Q_2 alors Q_1 ».

Pour montrer la première assertion, on suppose Q_1 est vraie, puis on montre par récurrence sur i : « Pour tous O_{10},..,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n, P_{eli} est vraie dans P(O_{10},..,O_{n0}) (au sens du a)). »

Pour montrer la 2ième assertion, on suppose que Q_2 est vraie et on montre par récurrence sur i : P_{eli} est vraie dans P(O_1,..,O_n) (au sens du a)).

On peut montrer simultanément les 2 assertions précédentes en montrant par récurrence T(i): « Si P_{el1},.,P_{eli-1} sont vraies dans P(O_1,..,O_n) et pour tous O_{10},..,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,.,O_n, P_{el1},.,P_{eli-1} sont vraies dans P(O_{10},..,O_{n0}) , alors « P_{eli} est vraie dans P(O_1,..,O_n)» est équivalent à « Pour tous O_{10},.,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,.,O_n, P_{eli} est vraie dans P(O_{10},..,O_{n0}) ». (On distinguera si P_{eli} est de type définition P_{elDi} :Def(D_0),R(D_0,D_1,..,D_k) ou de type relation P_{elRi} :R(D_1,.,D_k). On utilisera alors, d'après la définition d'objets mathématiques pouvant être représentés simultanément par des concepts particuliers non-flous donnée dans le 1^{ier} article, que « D_1,..,D_k peuvent représenter simultanément D_{10},..,D_{k0} dans P(O_1,..,O_n) » est équivalent à : « Il existe O_{10},.,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n tels que O_{10},.,O_{n0},D_{10},..,D_{k0} peuvent être représentés simultanément par O_1,..,O_n, D_1,.,D_k » et : « D_1,..,D_k peuvent représenter simultanément D_{10},..,D_{k0} dans P(O_{10},..,O_{n0}) » est équivalent à « O_{10},.,O_{n0},D_{10},..,D_{k0} peuvent être représentés simultanément par O_1,..,O_n, D_1,.,D_k »).

On a le Lemme suivant équivalent au Lemme 2.12 :

LEMME 2.17 :

a)Toute proposition élémentaire Platoniste stable (de type relation ou définition) est vraie ou fausse (« fausse » signifiant « n'est pas vraie »).

b)Aucune proposition élémentaire stable Platoniste n'est pas (vraie et fausse).

LEMME 2.18 :

a)Toute proposition Platoniste stable est vraie ou fausse.

b)Toute proposition Platoniste stable n'est pas vraie et fausse.

Preuve :

Si une proposition stable Platoniste est de la forme $P(P_{el1},.,P_{eln})$, $P_{el1},..,P_{eln}$ étant des propositions élémentaires stables Platonistes, alors d'après la définition d'une proposition stable Platoniste vraie, $P(P_{el1},..,P_{eln})$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. Ceci est la conséquence immédiate du Lemme 2.17 obtenue par une démonstration par récurrence immédiate sur les signes distinctifs 1,..,n.

Il est évident, et on admettra qu'à cause de la définition des concepts relationnels « et », « ou », « Non », si P_1 et P_2 sont des propositions Platonistes stables non-floues, alors « P_1 ou P_2 », « P_1 et P_2 », « NonP_1 » sont non-floues.

On a donc démontré le lemme.

REMARQUE 2.19A :

On remarque qu'on pourrait appeler le a) des Lemmes 2.17 et 2.18 *Principes du Tiers exclu* pour les propositions élémentaires Platonistes stables et les propositions Platonistes et le b) des Lemmes 17 et Lemme 18 Principes de Non-contradiction pour les Propositions élémentaires Platonistes et les propositions Platonistes.

Cependant, ces Principes ne sont plus admis axiomatiquement comme dans les théories mathématiques de logique formelle, mais sont des Lemmes qui sont déduits des axiomes de la TLP. Nous adopterons pour eux les dénominations précédentes.

DEFINITION 2.19B :
PROPOSITION PLATONISTE

On a déjà défini un exemple de symbole particulier non-flou. On généralise cette définition en admettant que si $O_1,..,O_i$ sont définis par une proposition P_{el} :Def($O_1,..,O_i$),R($O_1,..,O_n$), analogue à une proposition élémentaire stable Platoniste de type définition mais avec $O_{i+1},..,O_n$ symboles particuliers non-flous (non nécessairement des concepts particuliers non-flous), alors $O_1,..,O_i$ sont des symboles particuliers non-flous.

Par définition, un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou ne pourra représenter aucun objet mathématique.

a)Une *proposition élémentaire Platoniste de type relation* est définie comme étant une expression analogue à une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation R($O_1,..,O_n$), mais avec les O_i qui sont des *symboles particuliers non-flous*. Si l'un des O_i n'est pas un concept particulier non-flou, elle ne sera pas vraie.

De même une *proposition élémentaire Platoniste de type définition* est définie comme étant analogue à une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition P_{Def} :Def($O_1,.,O_i$),R($O_1,..,O_n$) mais avec certains O_j, pour j>i, qui sont des *symboles particuliers non-flous* pré-définis. Si l'un des O_j n'est pas un concept particulier non-flou, $O_1,..,O_i$ seront des symboles particuliers non-flous qui ne sont pas des concepts particuliers non-flous et ne pourront représenter aucun objet mathématique.

b)Si P_{el} est une proposition élémentaire Platoniste de type relation ou de type définition, on aura « P_{el} est *vraie* » est équivalent à « P_{el} est une proposition élémentaire stable Platoniste (de type relation ou de type définition) qui est vraie ».

c)Si une proposition P est une séquence finie $(P_1,.,P_k)$ de propositions élémentaires Platonistes, on dira que P est une *proposition Platoniste.*

d) Si une proposition P est une séquence finie $(P_1,.,P_k)$ de propositions élémentaires Platonistes, (et donc P est une *proposition Platoniste.*), on dira que P est vraie si toutes les propositions élémentaires Platonistes sont vraies, et que P est n'est pas vraie si au moins l'une d'elle n'est pas vraie.

e)Si P1 et P2 sont des propositions Platonistes dont les symboles particuliers non-flous qu'elles utilisent sont définis par les mêmes propositions, alors « P1 et P2 » et « P1 ou P2 » et « Non(P1) » seront aussi appelées *propositions Platonistes*.

f)On peut élargir la définition d'une proposition stable Platoniste en admettant que si P est une proposition Platoniste et si tous les symboles particuliers non-flous prédéfinis utilisés par P sont des concepts particuliers non-flous, alors on dira que P est une *proposition stable Platoniste* et on représentera P par $P(O_1,..,O_n)$, $O_1,.,O_n$ étant les concepts particuliers non-flous prédéfinis utilisés par P.

LEMME 2.19C:

a)Toute proposition élémentaire Platoniste est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

b)Toute proposition Platoniste est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

Preuve :

a) $O_1,..,O_n$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, on a « $O_1,..,O_n$ sont tous des concepts particuliers non-flous » ou « O_1 n'est pas un concept particulier non-flou ou..ou O_n n'est pas un concept particulier non-flou ».

Il en résulte que si on a une proposition élémentaire Platoniste de type P_{elD} :$Def(O_1,..,O_i)$,$R(O_1,..,O_n)$ ou P_{elR} :$R(O_1,..,O_n)$, alors « P_{elD} est stable » ou « P_{elD} n'est pas stable » et de même pour P_{elR}. Or on a vu si P_{elD} est stable « P_{elD} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie » et si P_{elD} n'est pas stable alors « P_{elD} n'est pas vraie (exclusivement) ». Il en résulte (à cause de la signification du concept primitif « ou ») que P_{elD} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. Et de même pour P_{elR}.

On peut déduire de ce qui précède que tout symbole particulier non-flou est un concept particulier non-flou ou(exclusif) n'est pas un concept particulier non-flou. Dans le cas où P_{elR} est de la forme « P_{elR1}ou P_{elR2} » ou « P_{elR1} et P_{elR2} » ou « Non (P_{elR1}) », avec P_{elRi} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie (pour i=1,2), alors d'après la signification des concepts relationnels primitifs « ou », « et », « Non », P_{elR} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. On obtient les différents cas avec les tables de vérité classiques qui sont vraies dans la TMP à cause de la signification des concepts primitifs relationnels « et », « ou », « Non ». Par exemple si P_{elR1} est vraie exclusivement et P_{elR2} n'est pas vraie exclusivement, alors « P_{elR1} et P_{elR2} » n'est pas vraie exclusivement et « P_{elR1} ou P_{elR2} » est vraie exclusivement.

Et donc toute proposition élémentaire Platoniste de type relation ou définition est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie.

b)Et on obtient immédiatement par récurrence que toute proposition Platoniste est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. (Si P_i $(P_{eli1},.,P_{elip})$, on montre par récurrence que $(P_{eli1},.,P_{elij})$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.)

REMARQUE 2.19D :

a)Si pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},.,O_{n0}$, identifiant O_{i0} avec le symbole particulier non-flou pouvant représenter seulement O_{i0}, on a défini une

proposition Platoniste $P(O_{10},..,O_{n0})$ alors on peut définir la relation non-floue R d'ordre de multiplicité n, telle que $O_{10},\ldots, O_{n0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, « $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie » est équivalent à « $P(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ».

Alors $O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous prédéfinis, on pourra identifier $R(O_1,..,O_n)$ avec une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation.

b) Si P_{elR1} et P_{elR2} sont des propositions élémentaires Platonistes de type relation telles que les symboles particuliers non-flous pré-définis qu'elles utilisent sont définis par les mêmes propositions élémentaires Platonistes de type définition, alors « P_{elR1} et P_{elR2} », « P_{elR1} ou P_{elR2} », « Non(P_{elR1}) », « Si P_{elR1} alors P_{elR2} » (Noté aussi « Cond(P_{elR1} , P_{elR2})»), « P_{elR1} est équivalent à P_{elR2} » (Noté aussi « Eq(P_{elR1} , P_{elR2}) »), seront des propositions élémentaires Platonistes dites *des propositions élémentaires Platonistes composées*. On pourra toujours identifier ces propositions élémentaires Platonistes de type relation.

Par exemple supposons qu'on ait la proposition élémentaire Platoniste P_{elR1} :$R(O'_1,.,O'_p)$. On considère alors la proposition élémentaire Platoniste composée P_{elC}:Non(P_{elR1}). On pourra alors exprimer P_{elC} sous la forme d'une proposition élémentaire Platoniste de type relation P_{elC} :$R_C(O'_1,.,O'_p)$, R_C étant définie comme une relation non-floue d'ordre de multiplicité p et telle que pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O'_{10},.,O'_{p0}$, R_C $(O'_{10},.,O'_{p0})$ est équivalent à Non($R(O'_{10},.,O'_{p0})$).

En accord avec la définition d'une proposition élémentaire Platoniste vraie P_{elC} sera vraie si $O'_1,.,O'_p$ sont des concepts particuliers non-flous pré-définis ou des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet et de plus, pour tous $O'_{10},.,O'_{p0}$) pouvant être représentés simultanément par $O'_1,.,O'_p$, $R_C(O'_{10},.,O'_{p0})$ est vraie. Dans le cas où l'un des O'_j est un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou, alors P_{elC} sera fausse.

On obtient de la même façon les propositions élémentaires Platonistes de type relation auxquelles on peut identifier les autres types de proposition élémentaires Platonistes composées.

DEFINITION 2.19E :

(PROPOSITIONS PLATONISTES IRREDUCTIBLES-DEFINITIONS AUXILIAIRES PLATONISTES).

Préambule : On a vu précédemment qu'une proposition Platoniste du type $P(O_1,.,O_n)$ avec $O_1,..,O_n$ concepts particuliers non-flous pré-définis était non-floue. On montre de la même façon qu'une proposition Platoniste du type $P(O_1,.,O_n)$ avec $O_1,..,O_n$ symboles particuliers non-flous est non-floue.(On utilise que tout symbole particulier non-flou est un concept particulier non-flou ou(exclusif) n'est pas un concept particulier non-flou.)

a)Par définition on dira qu'une proposition Platoniste P est *irréductible au sens strict* si elle est constituée d'une séquence de propositions élémentaires Platonistes, c'est à dire P n'est pas de la forme « Non(P_{p1}) » ou « P_{p1} et P_{p2} » ou « P_{p1} ou P_{p2} » avec P_{p1} et P_{p2} propositions Platonistes. On admettra comme évident que toute proposition Platoniste P peut s'exprimer en fonction de propositions Platonistes irréductibles $P_{ir1},..,P_{irk}$ et des concepts primitifs relationnels « ou », « et », « non », « si…alors », « est équivalent à ». Dans le cas où P utilise seulement le concept primitif relationnel « et » et le cas où P est irréductible au sens strict, on dira qu'elle est irréductible au sens large. On dira aussi simplement « P est irréductible » pour « P est irréductible au sens strict ».

b)$O_{i+1},.,O_n$ étant des symboles pariculiers pré-définis, on pourra définir une proposition élémentaire Platoniste de type définition d'une proposition stable Platoniste irréductible P par:
« P_{elD} :Def($O_1,.,O_i$),$R(O_1,..,O_n)$, avec $R(O_1,..,O_n)$ a *la même signification* que la *proposition Platoniste auxiliaire* $P_{aux}(O_1,.,O_n)$ ». Ceci signifiera que pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{n0}$, $R(O_{10},..,O_{n0})$ est équivalent à $P_{aux}(O_{10},.,O_{n0})$. On dira que ((Def($O_1,.,O_i$),$R(O_1,..,O_n)$), $P_{aux}(O_1,..,O_n)$) est *une définition auxiliaire Platoniste* (de ($O_1,.,O_i$)).

De même on pourra définir une poposition élémentaire Platoniste de type relation par :

«P_{elR} : $R(O_1,.,O_n)$ avec $R(O_1,..,O_n)$ a la même signification que la proposition Platoniste auxiliaire $P_{aux}(O_1,.,O_n)$ ».

Si $P_{aux}(O_1,.,O_n)$ est une proposition Platoniste auxiliaire utilisée par P, elle aussi pourra utiliser des propositions Platonistes auxiliaires, et on pourra considérer qu'elles aussi sont utilisées par P. On notera $P_{aux}(P)$ l'ensemble (éventuellement vide) des couples $(R(O_1,..,O_n),P_{aux}(O_1,..,O_n))$, avec $P_{aux}(O_1,..,O_n)$ proposition Platoniste auxiliaire utilisée par P.

Si P est la proposition Platoniste irréductible $(P_{el1},..,P_{elk})$ et qu'elle utilise la proposition Platoniste irréductible $P_{aux}(P_{elaux1},..,P_{elauxr})$, on dira:

-Chaque proposition élémentaire Platoniste P_{elj} est une des proposition élémentaires Platonistes *constituant* P, mais n'appartient à aucune proposition auxilaire utilisée par P.

-P_{aux} *appartient* à P, et toute proposition auxiliaire P_{elauxj} *appartient* à P_{aux} et à P et est une des propositions élémentaires Platonistes *constituant* P_{aux} mais n'est pas une des propositions élémentaires Platonistes constituant P ou une autre proposition auxiliaire utilisée par P.

On généralise les définitions précédentes dans le cas où P et Paux ne sont pas des propositions Platonistes irréductibles.

On pourra, de la même façon que les définitions auxiliaires dans une proposition mathématique simple, ordonner les définitions Platonistes auxiliaires.

On remarque que si toutes les propositions auxiliaires Platonistes utilisées par une proposition Platoniste irréductible P sont irréductibles, on obtient par récurrence que tous les symboles particuliers définis dans P sont des concepts particuliers non-flous.

c)On remarque que si P1 et P2 sont 2 propositions Platonistes dont les mêmes propositions définissent les symboles particuliers non-flous pré-définis qu'elles utilisent, alors nécessairement elles sont *indépendantes*, c'est-à-dire que P1 ne peut utiliser de symbole particulier non-flou défini dans P2 et réciproquement. En effet si P1 définit un symbole O_j utilisé par P2, alors O_j est un symbole pré-défini utilisé par P2 et défini par P1 et donc ce ne sont pas les mêmes propositions qui définissent les symboles particuliers pré-définis utilisés par P1 et P2. Il en résulte que si P1 et P2 sont des propositions Platonistes irréductibles au sens strict dont les mêmes propositions définissent les symboles particuliers non-flous pré-définis qu'elles utilisent, alors « P1 et P2 » est équivalente à une proposition Platoniste irréductible au sens strict . Par exemple, si P1 est la proposition $(P_{ei11},..,P_{el1k(1)})$ et P2 est la proposition $(P_{el21},..,P_{elk(2)})$, alors il est évident que « P1 et P2 » est équivalent à la proposition Platoniste irréductible $(P_{el11},..,P_{el2k(2)})$.

De même si P est une proposition Platoniste ne contenant aucune proposition élémentaire Platoniste de type définition, alors P est équivalente à une proposition irréductible.

DEFINITION 2.20 :

a)On appelle « *ensemble de symboles élémentaires Platonistes* » un sous-ensemble fini S de $\mathbf{Q}^2$ (dont on a établi l'existence dans l'article [(1)]), dont un symbole élémentaire *«blanc »*. et un symbole élémentaire « *point* » et deux symboles élémentaires « *guillemets* («) et(») ». Les éléments de S seront donc appelés *symboles élémentaires* de S. (Dans ce qui suit, tout symbole élémentaire utilisé en mathématique classique sera identifié avec un élément de S.)

b)On appellera *chaine* ou *symbole composé* de S une séquence finie de symboles élémentaire de S.

c)On dira que les symboles élémentaires ou composés de S sont des *symboles* de S.

DEFINITION 2.21 :

S étant un ensemble de symboles élémentaires de Platonistes, on appelle *proposition sur* S une chaine de S, finissant par le symbole élémentaire « point » (pouvant contenir plusieurs « points »), ou commençant par le symbole guillemet « « » et finissant par le symbole guillemet « » ». (Notons que dans la pratique, on utilisera plus généralement des guillements pour représenter des chaînes de symboles élémentaires).

DEFINITION 2.22 :

a)S étant un ensemble de symboles élémentaires Platonistes, on appelle *Texte sur* S, une séquence finie de propositions sur S.

b)Si T :(P_1,..,P_n) et T' :(Q_1,..,Q_r) sont des textes sur S, on pourra noter (T,Q_1,..,Q_r) ou (T,T') le texte (P_1,.P_n,Q_1,..,Q_r).

DEFINITION 2.23 :

a)On appelle *code Platoniste* C un couple (S,R_C), S étant un ensemble de symboles Platonistes et R_C une relation tels que pour tout texte T(P_1,..,P_n) sur S, et toute proposition P_i de T, alors R_C soit une relation reliant P_i avec ce qu'on appellera une *signification Platoniste* de P_i dans T sur C, qui pourra être l'ensemble vide ou (exclusif) une proposition Platoniste ou (exclusif) une *proposition Platoniste relationnelle*. (Nous définirons plus loin cette dernière expression). $Pl_C(P_i)$ représentera une une signification Platoniste quelconque de P_i, et on aura donc $P_iR_CPl_C(P_i)$. De plus si on a $P_iR_C\emptyset$, P_i ne sera pas vrai dans T sur C et Ø sera l'unique signification Platoniste de P_i. Si $Pl_C(P_i)$ est une proposition Platoniste, alors $Pl_C(P_i)$ pourra représenter différentes propositions Platonistes. De plus on dira alors que P_i est *équivalente (dansT sur C)* à la proposition Platoniste $Pl_C(P_i)$ (Qui sera aussi sa *signification Platoniste*).

La relation R_C sera définie par des règles appelées *règles syntaxiques du code Platoniste* C. Pour que $Pl_C(P_i)$ soit différent de l'ensemble vide, P_i devra ou bien être une proposition mathématique simple (non flottante) ou bien une proposition mathématique simple flottante ou bien une *proposition mathématique conditionnelle* qu'on définira plus loin, ou bien une *proposition mathématique mixte* qu'on définira plus loin. Par définition, P_i étant une proposition mathématique simple non-flottante (c'est-à-dire on le rappelle n'utilisant pas de concepts généraux non-flous flottants), P_i sera vraie s'il existe une proposition Platoniste $Pl_C(P_i)$ telle que $P_iR_CPl_C(P_i)$ et que de plus $Pl_C(P_i)$ soit vraie (Et donc soit nécessairement une proposition stable Platoniste).

Par convention « une proposition mathématique simple », non suivie de « flottante » représentera une proposition mathématique simple non-flottante. Cependant il sera en général toujours possible de généraliser les propriétés des propositions mathématiques simples non-flottantes aux propositions mathématiques simples flottantes.

On aura les règles syntaxiques d'un code Platoniste C suivantes (C n'est pas unique), pour obtenir la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple (non-flottante) :

Considérons un texte sur T(P_1,..,P_n) sur un ensemble S et un code C (S,R_C).
(i)Pour i=1, supposons P_1 est irréductible au sens strict (On rappelle qu'une proposition mathématique simple irréductible au sens large est une proposition mathématique simple du type « R_1 et..et R_k », avec les R_i propositions irréductibles au sens strict et indépendantes entre elles.)
-$Pl_C(P_1)$ sera nécessairement une proposition stable Platoniste irréductible au sens strict.
De plus :

(j1)On a vu que d'après la définition d'une proposition mathématique simple, P_1 pouvait utiliser une expression du type F(O_1,..,O_n), F étant une fonction-concept, O_1,..,O_n étant des symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires ou des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet. On peut considérer que F(O_1,..,O_n) n'est pas associé ou implicitement associé à une définition auxiliaire mais est *implicitement associé à une définition auxiliaire au sens d'une fonction-concept*, (utilisant F,O_1,..,O_n). F(O_1,..,O_n) sera aussi définie implicitement par une proposition élémentaire Platoniste appelée *définition implicite* de F(O_1,..,O_n) et notée impl(F(O_1,..,O_n)). Cependant, dans le cas où O_1,..,O_n sont des concepts généraux non-flous et F(O_1,..,O_n) peut représenter un objet mathématique on identifiera F(O_1,..,O_n) avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet. Si O_1,.,O_i sont des symboles particuliers non-flous pré-définis et O_{i+1},.,O_n des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet, la définition

implicite de $F(O_1,..,O_n)$ sera : impl($F(O_1,..,O_n)$) :Def($F(O_1,..,O_n)$),R($F(O_1,..,O_n),O_1,.,O_i$), avec R($F(O_1,..,O_n),O_1,.,O_i$) : « ($F(O_1,..,O_n)$, $(O_1,..,O_n)$) appartient au concept général F ».

On dira que $F(O_1,..,O_n)$ est un *symbole particulier obtenu par une fonction-concept.*.

D'après sa définition, une proposition mathématique simple pourra aussi contenir une expression du type $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, contenant au moins un « O_1 » ou un « C_1 » , avec $O_1,..,O_n$ symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires et donc n'étant pas définis en utilisant des fonction-concepts (Car sinon ils seraient définis par des définitions auxiliaires implicites et au sens d'une fonction-concept), $C_1,.,C_p$ concepts généraux non-flous pré-définis pouvant représenter chacun un unique objet, $E(O_1,..,C_p)$ pouvant utiliser des fonction-concepts. On rappelle que :

-$E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ ne contient aucune relation non-floue ni concept primitif relationnel ni symboles de ponctuation excepté des symboles « parenthèses » ou « virgule » ou « accolades » ni symboles « blanc » ni symbole « point » si celui-ci est le dernier symbole de $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$.

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ est immédiatement précédé d'un symbole « blanc » ou d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un « guillemet ouvert » et est immédiatement suivi d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un symbole parmi « blanc » ou « point » ou « guillemet fermé » ou « virgule », celle-ci étant suivi d'un symbole « blanc ».

En général $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ sera défini implicitement par une proposition Platoniste notée impl($E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$) et constituée de propositions élémentaires Platonistes de type définition de type P_{elDi} :impl($F_i(O'_{i1},..,O'_{it(i)})$), et obtenues à partir de règles de convention *appelées règles syntaxiques de convention (symbolique) du code Platoniste* C. Cependant, pour j parmi 1,.,t(i), O'_{ij} pourra lui-même être de la forme $F_{k(j)}(O'_{k(j)1},..,O'_{k(j)t(k(j))})$ en étant défini par une proposition $P_{elDk(j)}$ précédant P_{elDi}. Cette proposition Platoniste impl($E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$) utilisera donc des fonction-concepts pré-définies et sera appelée *définition implicite* de $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$. On pourra alors identifier $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ avec F_{COMB} $(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, F_{COMB} étant une fonction-concept telles que pour tous $O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, $F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$ peut représenter le même objet que $E(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$. Les règles syntaxiques permettant de d'obtenir impl($E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$) permettront d'obtenir aussi des propositions Platonistes définissant $F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$ ou F_{COMB}. Ces dernières seront appelées *définition implicite* de $F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$ ou de F_{COMB} et seront représentées par impl($F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$) ou impl($F_{COMB}$). On dira que F_{COMB} est une *combinaison de fonction-concepts* et que $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ est un symbole particulier *obtenu par une combinaison de fonction-concepts*.

F_{COMB} sera définie par une proposition Platoniste $Pl_{FCOMB}(P_{el0},.,P_{elp})$ du type suivant. Supposons que le concept de départ de F_{COMB} ne contienne que des séquences finies à n termes.

On aura alors P_{el0} :Def($O_1,..,O_n$), $R_0(O_1,..,O_n)$, avec $R_0(O_1,..,O_n)$ a comme signification Platoniste $Pl_0(P_{el1},..,P_{elp})$ avec pour i dans {1,.,p} P_{eli} :Def($F_i(O'_{i1},.,O'_{ir(i)})$, $R_i(F_i(O'_{i1},.,O'_{ir(i)}),O'_{i1},..,O'_{ir(i)})$: « $(O'_{i1},.., O'_{ir(i)})$ appartient à Dep(F_i) et ($F_i(O'_{i1},..,O'_{ir(i)})$, $(O'_{i1},..,O'_{ir(i)})$) appartient à F_i ».

Avec :

-$O'_{i1},..,O'_{ir(i)}$ parmi $O_1,..,O_n$ et les $F_j(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ avec j<i.

-F_i fonction-concept connue.

(Pour j>0 Les P_{elj} constituent donc Pl_0, mais aussi Pl_{FCOMB})

On identifiera alors Dep(F_{COMB}) avec $(O_1,..,O_n)$sans paramètres fixes et F_{COMB} avec ($F_p(O'_{p1},..,O'_{pr(p)})$,$(O_1,..,O_n)$) sans paramètres fixes. On peut aussi ajouter 2 propositions élémentaires Platonistes P_{elp+1} et P_{elp+2} avec :

P_{elp+1} :Def(x), $R_{p+1}(x)$: « x est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP ».

P_{elp+2} :$R_{p+2}(x)$: « x appartient à F_{COMB} est équivalent à x appartient à ($F_p(O'_{p1},..,O'_{pr(p)})$,$(O_1,..,O_n)$) sans paramètres fixes ».

$O_{10},..,O_{n0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on définit aisément $F_{COMB}(O_{10},..,O_{n0})$ à partir de $(P_{el1},.,P_{elp})$.

On pourra aussi utiliser la fonction-concept F_{Ids} de concept de départ « une séquence finie » telle que si s est une séquence finie $F_{Ids}(s)$=s.

Dans le cas où les régles syntaxiques de convention (symbolique) ne permettent pas d'identifier $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec $F_{COMB}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, F_{COMB} étant une fonction-concept, par définition $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sera alors identifié avec un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique. On pourra alors représenter $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ par $F_{IMP}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, qui par définition est un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet. On dira que F_{IMP}, qui n'est pas une fonctio-concept, est la *fonction-concept impossible*. On verra dans des exemples que des fonctions-concepts pourront être utilisées pour définir des relations non-floues.

Les définitions implicites précédentes n'appartiendront pas à la signification Platoniste $Pl_C(P_1)$ de la proposition Platoniste considérée d'où le qualificatif « implicite ».

Par exemple, x, et y étant des symboles particuliers pré-définis, le symbole particulier $(x+_{\mathbf{N}}3)\times_{\mathbf{N}}y$ est obtenu par une combinaison de fonction-concepts et pourra être noté $E(x,y,+_{\mathbf{N}},\times_{\mathbf{N}},3)$.

(j2)DEFINITION AUXILIAIRE PRINCIPALE

Par convention et en accord avec la définition donnée dans le 1[ier] article, toutes les définitions auxiliaires contenues par une proposition mathématique simple seront représentées par une expression du type $D_{aux}(o, D_1,..,D_k)$ avec pour i parmi 1,.,k D_i symbole particulier non-flous pré-définis au sens large par une définitions auxiliaire ou une définition mathématiques simple et donc ne sera pas obtenu par une fonction-concept ou une combinaison de fonction-concepts (car alors ils seraient définis par une définition auxiliaire *implicite au sens d'une fonction-concept*).

On a vu qu'on pouvait associer à une proposition Platoniste et donc à $Pl_C(P_1)$, un ensemble $P_{aux}(Pl_C(P_1))$, contenant tous les couples $(R_i(O_1,.,O_n),P_{Plauxi}(O_1,.,O_n))$, $P_{Plauxi}(O_1,.,O_n)$ proposition Platoniste auxiliaire utilisée par $Pl_C(P_1)$. Les O_j pourront être des concepts particuliers non-flous mais aussi des symboles particuliers non-flous ne pouvant représenter aucun objet mathématique . Dans tous les cas, on les considèrera comme des concepts particuliers non-flous c'est-à-dire que pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ on aura $R_i(O_{10},.,O_{n0})$ est équivalent à $P_{Plaux}(O_{10},..,O_{n0})$, $O_{10},..,O_{n0}$ identifiés avec des concepts particuliers non-flous étant les seuls symboles particuliers pré-définis utilisés par $P_{Plaux}(O_{10},..,O_{n0})$. On rappelle que si on a une proposition Platoniste irréductible P_{Pl} :$(Pel_1,..,Pel_k)$, on dira que les Pel_i, qui n'appartiennent à aucune proposition Platoniste auxiliaire de P_{Pl} sont des propositions élémentaires Platonistes *constituant* P_{Pl}. On dira aussi que P_{Pl} *contient* toute proposition élémentaire Platoniste constituant P_{Pl} ou constituant une proposition Platoniste auxiliaire utilisée par P_{Pl}.

Dans cette section et la suivante, on utilisera la notion de *signification Platoniste généralisée*. Si $P_{aux}(D_1,.,D_k)$ est une proposition auxiliaire contenue par P_1, les D_j étant des symboles particuliers non-flous, la *signification Platoniste généralisée* de $P_{aux}(D_1,.,D_k)$, notée $Pl_{CG}(P_{aux}(D_1,..,D_k))$ sera la proposition Platoniste identique à $Pl_C(P_{aux}(D_1,..,D_k))$ obtenue en considérant les D_j comme des concepts particuliers non-flous. $Pl_{CG}(P_{aux}(D_1,..,D_k))$ pourra donc être une proposition Platoniste qui n'est pas stable, et pourra être différente de l'ensemble vide même si l'un des D_j n'est pas un concept particulier non-flou (Contrairement à $Pl_C(P_{aux}(D_1,\ldots,D_k))$. Cependant la signification Platoniste généralisée et la signification Platoniste seront évidemment identiques si tous les D_j sont des concepts particuliers non-flous ce qui sera en général le cas.

Si, dans la proposition mathématique simple irréductible considérée P_1, un symbole x est associé à une définition auxiliaire $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$, celle-ci n'étant pas contenue par une proposition auxiliaire $P_{aux}(H_1,..,H_p)$, les H_j étant des symboles particuliers pré-définis au sens large, telle que $Pl_{CG}(P_{aux}(H_1,..,H_p))=\emptyset$ (On rappelle que $Pl_{CG}(P_{aux}(H_1,..,H_p))$ est la signification Platoniste généralisée de $P_{aux}(H_1,..,H_p)$) ni à une définition auxiliaire $D_{aux}(y,H_1,..,H_p)$ telle que $Pl_{CG}(y,H_1,..,H_p)=\emptyset$, alors $Pl_C(P_1)$ contiendra nécessairement une proposition élémentaire Platoniste de type définition P_{eli} :$Def(x),R_i(x,D_1,..,D_k)$, R_i étant défini comme suit :

-Si $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ ne contient (strictement) aucune définition auxiliaire, R_i sera définie par : Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP x_0, $D_{10},.,D_{k0}$, $R_i(x_0,D_{10},..,D_{k0})$ est équivalent à $D_{auxi}(x_0,D_{10},..,D_{k0})$.

-Si $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ contient (strictement) au moins une définition auxiliaire mais $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))=Ø$, alors R_i sera la relation impossible R_{IMP}. (Et alors P_1 ne contiendra pas les propositions élémentaires de type définition définissant les symboles particuliers définis dans $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$).
-Si $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ contient (strictement) au moins une définition auxiliaire et $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ est une proposition Platoniste utilisant x et chaque D_s, alors $R_i(x,D_1,.,D_k)$ aura comme signification $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$. Cependant dans le cas où $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ ne contient pas certains symboles $H_1,..,H_s$ parmi $x,D_1,..,D_k$, on remplacera $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ par Pl_{CG}(« « $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ » et $H_1=H_1$ et..,et $H_s=H_s$ » »).

$Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$, *signification Platoniste de la proposition auxiliaire* $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$, sera définie par les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C.

Dans tous les cas, on dira que $R_i(x,D_1,.,D_k)$ est la *signification Platoniste généralisée relationnelle* de $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$. On rappelle que les règles syntaxiques du code Platoniste C permettront de définir $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$.

Par définition, si un concept général non-flou C_j ne pouvant représenter qu'un unique objet est utilisé par $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ ou une des propositions auxiliaires Platonistes qu'elle utilise,, on dira que C_j *appartient* à la définition élémentaire Platoniste de type définition $Def(x),R_i(x,D_1,.,D_k)$.

Si dans P_1, x est associé à une définition auxiliaire de niveau 0 n'appartenant pas à une expression du type « Non(R_1) » ou « Si R_1 alors R_2 » ou « R_1 ou R_2 » ou « R_1 est équivalent à R_2 », R_1 et R_2 propositions indépendantes, alors dans $Pl_C(P_1)$, on dira alors que la définition auxiliaire définissant x est une *définition auxiliaire principale*. Alors d'après les règles syntaxiques du code C, x sera défini par une proposition Platoniste élémentaire de type définition n'appartenant à aucune proposition Platoniste auxiliaire et donc sera l'une des propositions élémentaires Platonistes constituant $Pl_C(P_1)$. Réciproquement toute proposition élémentaire Platoniste de type définition constituant $Pl_C(P_1)$ correspondra à une définition auxiliaire principale contenue par P_1.

Si on a dans P_1 une définition auxiliaire principale de type « Il existe un et un seul x tel que $D_{auxj}(x, D_1,..,D_k)$ », alors $Pl_C(P_1)$ sera constituée d'une proposition de type P_{elj} :$Def_{UN}(x),R(x, D_1,..,D_k)$ dite proposition élémentaire Platoniste de type définition *avec unicité*. $R(x,D_1,..,D_k)$ sera identique au cas où on aurait comme définition auxiliaire principale « Il existe x tel que $D_{auxj}(x, D_1,..,D_k)$ », et P_{elj} aura la même signification que $(P_{elj1},P_{elj2},P_{elj3})$, avec P_{elj1} :$Def(x)$, $R(x,D_1,..,D_k)$, P_{elj2} :$Def(y)$, $R(y,D_1,..,D_k)$, P_{elj3} :$x=y$.

On généralise ce qui précède dans le cas où on a $(x_1,..x_t)$ est un symbole particulier associé à une définition auxiliaire $D_{auxj}(o_1,.,o_t,D_1,.,D_k)$.

(j3)PROPOSITION AUXILIAIRE PRINCIPALE.

Si P_1 contient une proposition auxiliaire (ou est elle-même du type) $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ telle que:

-Les symboles particuliers pré-définis au sens strict associés à des définitions auxiliaires de niveau 0 (pas au sens d'une fonction-concept) utilisés par $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ sont $D_1,..,D_k$. De plus, les définitions de $D_1,..,D_k$ sont des définitions auxiliaires principales.
-$C_1,..,C_p$ sont les concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet utilisés par $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ qui n'appartiennent à aucune définition auxiliaire ou qui sont utilisés pour définir implicitement par des combinaisons de fonctions-concepts des symboles particuliers n'appartenant pas à des définitions auxiliaires.
- $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ ne contient pas de définition auxiliaire principale et n'est pas une définition auxiliaire principale et n'est pas contenue par une définition auxiliaire principale.
- $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ est nécessairement vraie si P_1 est vraie, d'après les concepts primitifs relationnels utilisés par P_1.
- $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ n'est pas de la forme « P_{auxA} et P_{auxB} » (ou « P_{auxA} , P_{auxB} »), P_{auxA} et P_{auxB} propositions auxiliaires indépendantes.

Alors on dira que $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ est *une proposition auxiliaire principale.*

Par exemple si P_1 est de la forme : Pour tout x tel que D(x), « Q(x) est équivalent à R(x) » , alors « Q(x) est équivalent à R(x) » sera *une proposition auxiliaire principale.*

Alors, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C :
-Si $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ est irréductible au sens strict, on remarque qu'alors $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ ne contient nécessairement aucune définition auxiliaire de niveau 0 car sinon celle-ci serait une définition auxiliaire principale, et par conséquent elle ne contient aucune définition auxiliaire. (Utilisant que que d'après la définition d'une proposition mathématique simple, si dans une proposition mathématique simple une proposition auxiliaire P_{aux1} contient une partie d'une proposition auxiliaire P_{aux2}, alors ou bien P_{aux1} contient strictement P_{aux2}, ou bien P_{aux2} contient strictement P_{aux1}, ou bien P_{aux1} est identique à P_{aux2}). Alors, $Pl_C(P_1)$ contiendra nécessairement une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation de la forme P_{elR} :$R(D_1,.,D_k,C_1,..,C_p)$, n'appartenant à aucune proposition Platoniste auxiliaire (et donc étant l'une des propositions élémentaires Platonistes constituant P_1) et avec pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $D_{10},.,D_{k0},C_{10},..,C_{p0}$, $P_{aux}(D_{10},..,C_{p0})$ est équivalent à $R(D_{10},.,C_{p0})$.On dira que P_{elR} :$R(D_1,.,D_k,C_1,..,C_p)$ est *la signification Platoniste généralisée relationnelle* de $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,..,C_p)$.

On remarque que si P_1 ne contient aucune définition auxiliaire, alors P_1 sera identique à $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$.

-Si $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ n'est pas irréductible au sens strict mais s'exprime en fonction des propositions irréductibles au sens strict $P_{ir1}(O'_{11},\ldots,O'_{1r(1)}),..,P_{irt}(O'_{t1},..,O'_{tr(t)})$ et de concepts primitifs relationnels, avec les O'_{rs} parmi $D_1,..,C_p$, alors $Pl_C(P_1)$ contiendra alors nécessairement une proposition élémentaire de type relation composée la constituant, dite *signification Platoniste généralisée composée* de $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$, obtenue en remplaçant dans $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ chaque $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ par sa *signification Platoniste généralisée relationnelle* qui est une proposition élémentaire Platoniste de type relation définie comme suit :
(i)Si $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ contient au moins une définition auxiliaire et $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)}))=\emptyset$, alors sa signification Platoniste généralisée relationnelle sera « 1=2 » si P_{irj} ne contient aucun O'_{js} et « $R_{IMP}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ » dans le cas contraire.

$Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)}))$, signification Platoniste de la proposition auxiliaire $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$, sera d'après les règles syntaxiques de convention du code C, identique à la signification Platoniste d'une proposition identique dans un texte, cette proposition utilisant des concepts particuliers non-flous pré-définis et des concepts généraux pouvant représenter un unique objet n'appartenant pas à des définitions auxiliaires représentés par les symboles $O'_{j1},..,O'_{jr(j)}$, et cette proposition étant précédée de propositions vraie.

(ii)Si $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ contient au moins un O'_{js} et ne contient aucune définition auxiliaire, sa signification Platoniste généralisée relationnelle sera la même que si elle avait été une proposition auxiliaire principale irréductible de P_1, telle qu'on l'a défini plus haut.

(iii)Si $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ contient au moins un O'_{js}, au moins une définition auxiliaire et $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0}))$ est une proposition Platoniste utilisant chaque O'_{js0} (identifiant chaque O'_{js0} avec un concept particulier non-flou pouvant représenter un unique objet O'_{js0}), alors sa signification Platoniste sera $R_j(O'_{j1},.,O'_{jr(j)})$, avec pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP O'_{j10} ;….,$O'_{jr(j)0}$, $R_j(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0})$ est équivalent à $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0})$. On dira que $R_j(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ *a comme signification* $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)}))$ puisque par définition on obtient $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)}))$ en remplaçant dans $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0})$ chaque O'_{js0} par O'_{js}.

$Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0}))$ sera d'après les règles syntaxiques de convention du code C, identique à la signification Platoniste d'une proposition identique à $P_{irj}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0})$ dans un texte, cette proposition utilisant des concepts particuliers non-flous pré-définis représentés par les symboles $O'_{j10},.,O'_{jr(j)0}$ et étant précédée de propositions vraie. On verra que cette signification Platoniste s'obtient exactement de la même façon que celle de P_1, avec la seule différence qu'elle peut utiliser des concepts particuliers non-flous pré-définis.

On verra plus loin que les règles syntaxiques du code Platoniste C qu'on a données permettant d'obtenir d'obtenir $Pl_C(P_1)$ sont en accord avec la définition précédente de façon évidente. En effet, on

donnera plus loin les règles syntaxiques du code C permettant d'obtenir la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple $P_i(O_1,.,O_p)$, utilisant les concepts particuliers non-flous pré-définis $O_1,.,O_p$,et aucun C_s, P_i étant précédée de propositions vraies. On vérifie que ces règles syntaxiques sont en accord avec notre définition de $Pl_C(P_1(C_1,.,C_p))$. On aurait pu alternativement donner ces règles syntaxiques, puis, utilisant la définition précédente, en déduire les mêmes règles syntaxiques du code C permettant d'obtenir $Pl_C(P_1(C_1,.,C_p))$ que celles qu'on a données. Cependant dans le cas où $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0}))$ ne contient pas certains symboles $K_{10},.,K_{t0}$ parmi $O'_{j10},..,O'_{jr(j)0}$ alors on remplacera $Pl_{CG}(P_{irt}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0}))$ par $Pl_{CG}($ « « $P_{irj}(O'_{j10},..,O'_{jr(j)0})$ » et $K_{10}=K_{10}$ et..et $K_{t0}=K_{t0}$ »).

(iv)Si P_{irj} ne contient aucun O'_{js} et $Pl_{CG}(P_{irj})$ est une proposition Platoniste, sa signification Platoniste généralisée relationnelle sera $R_j(1)$, R_j étant une relation non-floue définie par : Pour tout objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP O_0, $R_j(O_0)$ est équivalent à « Pl_{CG}(« « P_{irj} » et $O_0=O_0$ »). On dira que $R_j(1)$ a *comme signification* « « Pl_{CG}(« « P_{irj} » et 1=1 »)

On rappelle qu'on dira que la proposition élémentaire Platoniste de type relation composée obtenue est la *signification Platoniste généralisée relationnelle composée* de $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$.

On remarque que dans le cas où une des propositions $P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jr(j)})$ est telle que $Pl_{CG}(P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jr(j)})))=\varnothing$, alors $Pl_C(P_1)$ ne contiendra pas les propositions élémentaires Platonistes de type relation définissant les symboles définis dans $P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jrj})$.

Réciproquement, toute proposition élémentaire Platoniste de type relation constituant $Pl_C(P_1)$ (et donc n'appartenant pas à une proposition Platoniste auxiliaire de $Pl_C(P_1)$), correspondra nécessairement à une proposition auxiliaire Principale contenue par P_1.

Dans le cas où P_i étant une proposition précédée de propositions vraies, P_i définit une fonction-concept F en utilisant des expressions du type $F(E_1,..,E_r)$ dans des propositions auxiliaires principales (Les E_j étant des symboles particuliers pré-définis ou obtenus à l'aide de combinaisons de fonction-concepts pré-définies et de symboles particuliers non-flous pré-définis), on considèrera alors $F(E_1,..,E_r)$ comme un symbole particulier non-flou pré-défini, ce qui signifie par exemple que si $Pl_C(P_i)$ est constitué d'une proposition élementaire de type relation $R(G_1,..G_s)$, certains G_j pourront être du type $F(E_1,..,E_r)$. Ce sera notamment le cas si on définit une fonction-concept récursive (Voir le premier article).

On a vu précédemment que si P_1 contenait une définition auxiliaire $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$, celle-ci contenant au moins une définition auxiliaire, $Pl_C(P_1)$ pouvait contenir la proposition élémentaire Platoniste de type définition Pel_{Di} :Def(x),$R_i(x,D_1,..,D_k)$, avec $R_i(x,D_1,..,D_k)$ a comme signification Pl_{CG}(« $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ et $H_1=H_1$ et..et $H_s=H_s$ »).

Or d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, on n'obtiendra pas de la même façon la signification Platoniste généralisée d'une proposition auxiliaire contenue (au sens large) dans une définition auxiliaire, et en particulier la signification Platoniste de $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$, de la même façon que la signification Platoniste généralisée de propositions auxiliaires non contenues dans une définition auxiliaire, comme par exemple P_1 et les propositions auxiliaires principales de P_1.

D'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, P_{aux} étant une proposition auxiliaire irréductible contenue par une définition auxiliaire et contenant au moins une définition auxiliaire (Au sens large. Par exemple on pourra avoir P_{aux} identique à $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ si celle-ci est irréductible), les propositions élémentaires Platonistes de type définition constituant P_{aux} seront définies de la même façon que lorsque P_{aux} n'est pas contenue par une définition auxiliaire, à partir des définitions auxiliaires principales de P_{aux}.

Il n'en sera pas de même pour les propositions élémentaires Platonistes de type relation constituant P_{aux}, même si on les obtiendra toujours à partir des propositions auxiliaires principales de P_{aux}. Dans ce qui suit on suppose toujours $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ irréductible et contient au moins une définition auxiliaire.

Par exemple, supposons que $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ contienne une proposition auxiliaire principale irréductible $P_{aux}(H_1,..,H_q,C_1,..,C_p)$. (On rappelle qu'alors nécessairement $P_{aux}(H_1,..,H_q,C_1,..,C_p)$ ne contiendre aucune définition auxiliaire), les H_j étant des symboles particuliers non-flous pré-définis au

sens large et les C_j des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet. Alors $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ contiendra nécessairement (si elle est différente de l'ensemble vide) une proposition élémentaire Platoniste de type relation la constituant Pel_R :$R(H_1,.,H_q)$, R étant une relation non-floue d'ordre de multiplicité q définie par, pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $H_{10},.,H_{q0}$, $R(H_{10},..,H_{q0})$ est équivalent à $P_{aux}(H_{10},.,H_{q0},C_1,..,C_p)$. On dira que $R(H_1,.,H_q)$ est la *signification Platoniste généralisée relationnelle* de $P_{aux}(H_1,..,C_p)$. Cela n'était pas le cas pour une proposition auxiliaire principale de P_1. Cependant, les significations Platonistes généralisées sont identiques dans les 2 cas si la proposition auxiliaire principale considérée ne contient pas de concepts généraux non-flous. Dans le cas où la proposition auxiliaire considérée est du type $P_{aux}(C_1,..,C_p)$, c'est-à-dire qu'elle ne contient aucun symboles particuliers non-flous pré-définis, alors sa *signification Platoniste généralisée relationnelle* sera identique à ce qu'elle serait si elle était une proposition auxiliaire principale de P_1.

D'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, ce qui précède sera vrai pour l'obtention de la signification Platoniste généralisée relationnelle de toute proposition principale irréductible d'une proposition auxiliaire contenue par $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$. Au contraire on obtiendra la signification Platoniste généralisée relationnelle de toute proposition auxiliaire principale irréductible d'une proposition auxiliaire de P_1 non contenue par une définition auxiliaire de la même façon que pour obtenir la signification Platoniste généralisée relationnelle d'une proposition auxiliaire principale irréductible de P_1.

Si $D_{aux}(x,D_1,..,D_k)$ contient une proposition auxiliaire principale non-irréductible $P_{aux}(H_1,.,H_q)$, $H_1,..,H_q$ symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large, $P_{aux}(H_1,.,H_q)$ étant constituée de propositions auxiliaires indépendantes irréductibles $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$, les O'_{js} étant parmi $H_1,.,H_q$ alors $Pl_{CG}(D_{aux}(x,D_1,..,D_k))$ contiendra nécessairement (Si elle est différente de l'ensemble vide) une proposition élémentaire Platoniste de type relation la constituant obtenue en remplaçant dans $P_{aux}(H_1,.,H_q)$ chaque $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ par sa signification Platoniste généralisée relationnelle, celle-ci étant définis par les mêmes points (i), (ii), (iii), (iv) précédents, avec les différences suivantes :

-Dans les points (i) et (iii), les O'_{js} ne représentent pas de concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet. De plus la signification Platoniste généralisée de $P_{irj}(O'_{j1},..,O'_{jr(j)})$ est celle d'une proposition auxiliaire contenue par une définition auxiliaire de P_1.

-Dans le point (ii), la signification Platoniste généralisée relationnelle d'une proposition auxiliaire principale irréductible est celle d'une proposition auxiliaire contenue par une définition auxiliaire.

-Dans le point (iv), si la proposition irréductible considérée P_{irj} contient au moins une définition auxiliaire, a une signification Platoniste différente de l'ensemble vide et ne contient aucun symbole particulier non-flou pré-défini O'_{js}, sa signification Platoniste relationnelle sera la même que si elle avait été une proposition irréductible constituant une proposition auxiliaire principale de P_1, et donc de la forme $R_j(E_1,.,E_r)$, si elle contient au moins un concept général non-flou ne pouvant représenter qu'un unique objet E_s n'appartenant pas à une définition auxiliaire contenue par $D_{aux}(x,D_1,..,D_k)$ (P_{irj} étant donc de la forme $P_{irj}(E_1,..,E_r)$) ou $R_j(1)$ dans le cas contraire. On dira alors respectivement, en conservant les mêmes notations, que $R_j(E_1,..,E_r)$ a *comme signification* $Pl_C(P_{irj}(E_1,..,E_r))$ (ou Pl_C(« « $P_{irj}(E_1,..,E_r)$) » et $K_1=K_1$ et.et $K_t=K_t$ ») et que $R_j(1)$ a *comme signification* Pl_C(« « P_{irj} » et 1=1 »).

On dira que la proposition élémentaire Platoniste de type relation composée obtenue est la *signification Platoniste généralisée relationnelle composée* de $P_{aux}(H_1,..,H_q)$.

Jusqu'ici on a supposé P_1 irréductible. $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ pourra contenir au moins une définition auxiliaire et être défini par des propositions auxiliaires irréductibles indépendantes $P_{auxj}(E_{j,1},..,E_{jr(j)})$ (aussi notées P_{auxj}, les $E_{j,s}$ étant parmi $x,D_1,..,D_k$ et des concepts primitifs relationnels parmi « Non », « et » , « ou »…. Si tel est le cas $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ sera obtenu en remplaçant dans $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$. $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ chaque P_{auxj} par :

-Dans le cas où P_{auxj} contient au moins une définition auxiliaire : $Pl_{CG}(P_{auxj})$ si celle-ci est une proposition Platoniste, $R_{IMP}(E_{j,1},.,E_{jr(j)})$ si P_{auxj} contient au moins un $E_{s,r(s)}$ et $Pl_{CG}(P_{auxj})=Ø$, et « 1=2 » si P_{auxj} ne contient aucun $E_{s,r(s)}$ et $Pl_{CG}(P_{auxj})=Ø$.

-Dans le cas où P_{auxj} ne contient aucune définition auxiliaire, la proposition Platoniste constituée de $R_j(E_{j,1},..,E_{jr(j)})$, R_j étant la relation on-floue définie par : Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $E_{j,10},..,E_{jr((j)0}$, $R_j(E_{j,10},..,E_{j,r(j)0})$ est équivalent à $P_{auxj}(E_{j,10},..,E_{r(j)0})$. (On remplacera les $E_{j,s}$ par les $H_{j,t}$, concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet contenus par P_{auxj} dans le cas où P_{auxj} ne contient aucun $E_{j,s}$).

Il y aura cependant une exception dans l'obtention précédente de $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ si $D_{auxi}(x,D_1,..,D_k)$ est du type « P_{aux1}et…et P_{auxp} » (« et » pouvant être remplacé par « , » si « , » a comme signification « et »), les P_{auxj} étant irréductibles (toujours implicitement au sens strict si on ne précise pas). On notera $Pl_{CGREMP}(P_{auxj})$ la proposition Platoniste qui doit remplacer P_{auxj} dans la définition précédente. Alors d'après les règles du code Platoniste C , on aura $Pl_{CG}(D_{auxi}(x,D_1,..,D_k))$ est la proposition Platoniste irréductible ($Pl_{CGREMP}(P_{aux1})$,..,$Pl_{CGREMP}(P_{auxp})$), avec évidemment la convention que si on a 2 propositions Platonistes P_{PlA} : (Pel1A,.,PelrA) et P_{PlB} :(Pel1B,..,PelsB), alors (P_{PlA},P_{PlB}) a la même signification que la proposition Platoniste(Pel1A,..,PelsB).

De plus, pour que P_1 (ou P_i avec i>1) ait une signification Platoniste qui soit une proposition Platoniste, nécessairement, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, tout symbole particulier, tout concept général, tout symbole représentant une relation non-floue contenue par P_1, appartiendra à une définition auxiliaire principale ou à une proposition auxilaire principale ou sera un symbole particulier associé à une définition auxiliaire principale. On pourra donner des règles syntaxiques définissant formellement les cas de proposition auxiliaire principale, obtenue à partir de la définiton générale donnée plus haut. Par exemple si P_1 (ou P_i) ne contient aucune proposition auxiliaire exceptée elle-même, alors P_1 (ou P_i) sera une proposition auxilaire principale.

On admettra, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, que les propositions élémentaires Platonistes constituant $Pl_C(P_i)$ seront dans le même ordre dans $Pl_C(P_i)$ que celui d'apparition dans P_i des définitions auxiliaires principales et propositions auxiliaires principales auxquelles elles correspondent. Il en résulte que si on a 2 significations Platonistes de P_i $Pl_{CA}(P_i)$ et $Pl_{CB}(P_i)$, alors si $Pl_{CA}(P_i)$ est de la forme (P_{el1A},..,P_{elpA}), nécessairement $Pl_{CB}(P_i)$ sera aussi de la forme (P_{el1B},.,P_{elpB}), les propositions élémentaires Platonistes et les définitions élémentaires Platonistes étant les mêmes termes.

(j4)La dernière règle syntaxique du code Platoniste C concernant une proposition mathématique simple irréductible, appelée « règle finale syntaxique du code Platoniste C » (Même si on pourra rajouter des règles syntaxiques, elle sera toujours considérée comme la dernière) sera que si d'après toutes les autres règles syntaxiques du code Platoniste C on a « P est éq uivalent à (ou a comme signification Platoniste) une proposition Platoniste » est indécidable, alors on aura : « P n'est pas équivalent à une proposition Platoniste ».

(j5)Si P_1 est une proposition mathématique simple irréductible qui n'est pas équivalente (dans T sur C) à une proposition stable Platoniste (d'après les points j1 à j4), alors on aura par définition $Pl_C(P_1)$ est Ø.

Dans le cas où P_1 est une proposition mathématique simple qui n'est irréductible au sens strict:
(h1)Si P_1 est une proposition mathématique simple utilisant les propositions auxiliaires mathématiques simples irréductibles au sens strict indépendantes Q_1,..,Q_h, alors P_1 sera équivalente à $Pl_C(P_1)$, $Pl_C(P_1)$ étant obtenu en remplaçant dans P_1 Q_i par $Pl_C(Q_i)$ si Q_i est équivalente à une proposition stable Platoniste $Pl_C(Q_i)$ (conservant les concepts et, ou, Non, et_G, ou_G …et par « 1=2 » sinon. Dans ce dernier cas, $Pl_C(Q_i)$ ne contiendra pas les propositions élémentaires Platonistes de type définition définies dans les définitions auxiliaires contenues par Q_i. Et donc on aura alors nécessairement P_1 a une proposition stable comme signification Platoniste à laquelle elle sera équivalente dans T sur C.

(ii)Si P_1 est une proposition mathématique simple telle que $Pl_C(P_1)$ est une proposition Platoniste stable qui est vraie, on dira que P_1 est *vraie* dans le texte T sur le code C. Si elle est une proposition mathématique simple avec $Pl_C(P_1)$ est une proposition Platonsite qui n'est pas vraie, on dira alors

qu'elle n'est pas vraie (ou qu'elle est fausse) dans le texte T sur le code C. Si $Pl_C(P_1)$ est Ø, on dira que P_1 n'est pas vraie dans T sur C.

Si P_1 n'est pas vraie, alors on admettra par définition d'un code Platoniste C que dans T, pour i>1, $Pl_C(P_i)$=Ø.

Par exemple si on a la proposition P_1 :« $(\mathbf{N},+_{\mathbf{N}})$ est un groupe » (identifiant $(\mathbf{N},+_{\mathbf{N}})$ avec un concept général non-flou représentant un unique objet), P_1 pourra être mis sous la forme de la proposition auxiliaire principale irréductible $P_{aux}((\mathbf{N},+_{\mathbf{N}}))$, et aura comme signification Platoniste P_{elR} :$R((\mathbf{N},+_{\mathbf{N}}))$: « $(\mathbf{N},+_{\mathbf{N}})$ est un groupe ». On aura bien alors pour tous objets non-relationnels et différent de l'EMP O_{10} et O_{20}, $R(O_{10}, O_{20})$ est équivalent à $P_{aux}(O_{10}, O_{20})$.

Si on a la proposition P_1 : « $(1+_{\mathbf{N}}2)\times_{\mathbf{N}}3=6$ », P_1 sera elle-même une proposition auxiliaire principale de la forme $P_{aux}(1,+_{\mathbf{N}},2,\times_{\mathbf{N}},3,6)$, et on pourra identifier « $(1+_{\mathbf{N}}2)\times_{\mathbf{N}}3$ » avec un symbole particulier obtenu par une combinaison de fonction-concepts et noté : $E(1,+_{\mathbf{N}},2,\times_{\mathbf{N}},3)$.

(iii)Si $P_1,\ldots,P_{i-1}$ sont des propositions vraies de T, et si $Pl_C(P_1),..,Pl_C(P_{i-1})$ entraînent que P_i est *équivalente* (dans le texte T sur C) à une proposition stable platoniste, celle-ci sera une signification platoniste de P_i dans T et sera notée $Pl_C(P_i)$.
(On définira « P_i est *équivalente* (dans le texte T sur C) à une proposition stable Platoniste $Pl_C(P_i)$ de la même façon que « P_1 est *équivalente* à une proposion stable Platoniste $Pl_C(P_1)$ », (P_i étant donc nécessairement une proposition mathématique simple) en ajoutant, dans le cas où P_i est irréductible au sens strict:

-Dans (j3) et (j2) (de (i)), P_i étant une proposition mathématique simple irréductible, $D_1,..,D_k$ pourront être parmi les concepts particuliers pré-définis $O_1,..,O_n$ utilisés par $P_i(O_1,..,O_n)$.

-Dans le cas où P_i est une proposition mathématique simple qui n'est pas irréductible au sens strict, on obtient $Pl_C(P_i)$ de la même façon que pour P_1 dans le cas où P_1 n'est pas irréductible.

(iv)Comme pour P_1, si $Pl_C(P_i)$ est une proposition Platoniste vraie, on dira que P_i est *vraie* dans le texte T sur le code et si c'est une proposition Platoniste fausse, que P_i n'est pas vraie ou qu'elle est *fausse* dans le texte T sur le code C.

Si pour i on a $Pl_C(P_i)$ est fausse alors pour j>i, $Pl_C(P_j)$=Ø.

On remarque que notre définition d'une proposition mathématique simple vraie donnée dans le 1ier article [(1)] ne sera valide que si elle appartient à un texte T sur un code C, toutes les propositions la précédant dans ce texte étant vraies.

On verra plus loin qu'un autre type de proposition qu'une proposition mathématique simple, appelée *proposition mathématique conditionnelle*, pourra avoir une signification Platoniste qui est une proposition stable Platoniste.

b)Tout code Platoniste C (S,R_C) admettra un Texte sur S appelé *hypothèses* de C et noté H(C) contenant des propositions équivalentes à des relations (ou objets mathématiques relationnels) entre des objets mathématiques qui sont vraies. H(C) contiendra les fondements de la TMP notamment l'Axiome 1.1 [(1)], la définition d'une relation floue et celles des ensembles ou d'un couple. H(C) sera utilisé pour obtenir $Pl_C(P_i)$, P_i étant une des propositions d'un texte T.

c)On a vu que les propositions Platonistes stables ne permettaient pas de définir un concept général non-flou « un C_1 » ou un concept relationnel général représentant une unique relation non-floue « R_G », puisque « « un C_1 »est un concept général non-flou » et « R_G est un concept relationnel général représentant une unique relation non-floue non-floue » n'étaient pas équivalents à des propositions mathématiques simples. Pour qu'un texte T puisse définir un concept général non-flou « un C_1 » et une relation non-floue R_G, on admettra que dans tout code Platoniste C un texte T peut aussi contenir des propositions $Q_{i,1}$ ($Q_{i,1}$ étant une proposition succédant immédiatement à P_i) de la forme:

$Q_{i,1}$ ((un) C_1) : « « (un) C_1 » est un concept général non-flou (pouvant représenter un unique objet mathématique) ».
$Q_{i,1}(n_G)$: « n_G est un concept général non-flou flottant. »

On rappelle que si n_G est un *concept général non-flou flottant*, il pourra être identifié avec un ou plusieurs concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet. Dans ce cas, d'après les règles syntaxiques de convention, si $Q_{i,1}(n_G)$ est immédiatement suivi d'une proposition P_{i+1}, avec $Pl_C(P_{i+1})$:P_{eli+1} :$R(n_G)$, R relation non-floue n'étant pas la relation impossible, alors n_G pourra être identifié avec tout concept général non-flou O_{0G} (c'est-à-dire pouvant représenter uniquement O_0) tel que $R(O_0)$ est vraie. On dira que $P_C(P_{i+1})$ est la *définition du concept général non-flou flottant* C_1. Elle pourra aussi être du type $Pl_C(P_{i+1})$: P_{eli+1} : $R(n_G,n_{1G},..,n_{kG}, C_{o1},.,C_{om})$, avec $n_{G1},..,n_{Gk}$ concepts généraux flottants pré-définis et $C_{o1},..,C_{om}$ concepts généraux non-flous pré-définis ne pouvant représenter qu'un unique objet. $n_{1G},..,n_{kG}$ étant identifiés avec $n_{10G},..,n_{k0G}$, n_G pourra être identifié avec tout O_{0G} tel que $R(O_0,n_{10G},..,n_{k0G},C_{01},..,C_{0m})$. On pourra aussi avoir $Pl_C(P_{i+1})$: P_{eli+1} : $R_{nj(1)G,..,nj(r)G}$ $(n_G, n_{m(1)G},..,n_{m(s)G},C_{01},..,C_{0m})$, les $n_{j(h)}$ et $n_{m(h)}$ constituant $n_{1G},..,n_{kG}$, avec $R_{nj(1)G,…,nj(r)G}$ *relation non-floue flottante de paramètres* $n_{j(1)G},...,n_{j(r)G}$.

Par définition, $n_{1G},..,n_{kG}$ étant des concepts généraux flottants pré-définis, une *relation non-floue flottante* $R_{n1G,..,nkG}$ *de paramètres* $n_{1G},..,n_{kG}$ est un symbole tel que si $n_{1G},..,n_{kG}$ sont identifiés simultanément à $n_{10G},..,n_{k0G}$ alors ce symbole sera identifié à une unique relation non-floue notée $R_{n10G,..,nk0G}$.

On dira alors que les propositions précédentes P_{eli+1} sont des *propositions élémentaires Platonistes flottantes* car elles sont analogues à des propositions élémentaires Platonistes mais utilisent des concepts généraux flottants. Les propositions précédentes P_{i+1} seront des propositions mathématiques simples flottantes et on montrera plus loin comment obtenir la signification Platoniste de telles propositions. On dira que ce sont les *définitions du concept général flottant* n_G.

On pourra aussi avoir les propositions :
$Q_{i,1}$ (*F*) : « *F* est une fonction-concept » (On a défini dans le 1[ier] article [(1)] une fonction-concept comme un concept général non-flou particulier).
$Q_{i,1}$ (*F*) pourra (non nécessairement) être suivi d'une proposition Platoniste définissant Dep(*F*) puis d'une proposition Platoniste (Pel1,Pel2), avec Pel1 :Def(t), R_1(t) : « t appartient à Dep(*F*) » et Pel2 :R_2(*F*(t),t). Ce nouveau type de proposition élémentaire Platoniste utilise *F*(t) de la même façon qu'un concept particulier non-flou pré-défini. Pel2 pourra aussi être une proposition élémentaire Platoniste classique du type : Pel2 : « R_1(t) est équivalent à R_2(t) », avec R_1(t) : « t appartient à *F*» et R_2 relation non-floue.
On pourra aussi utiliser des propositions définissant des concepts généraux paramétrés du type :
$Q_{i,1}(C_{n1G,..,npG})$: « $C_{n1G,..,npG}$ est un concept général non-flou (pouvant représenter un unique objet) paramétré de paramètres $n_{1G},..,n_{pG}$. »
Par définition, $C_{n1G,…,npG}$ *peut représenter un unique objet* signifiera que nour tous $n_{10G},..,n_{p0G}$ pouvant être identifiés avec $n_{1G},..,n_{pG}$, $C_{n10G,…,np0G}$ est un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet.
$Q_{i,1}$ pourra alors être suivi d'une proposition P_{i+1} telle que $Pl_C(P_{i+1})$:$P_{eli+,11}$,$P_{eli+1,2}$ avec :
$P_{eli+,11}$;Def(x),R_1(x),R_1(x) : « x est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP. Et $P_{eli+1,2}$: $R_{2n1G,…,npG}(x)$:« x appartient à $C_{n1G,..,npG}$ » est équivalent à « $R_{nj(1)G,..,nj(r)G}$ $(x, n_{m(1)G},..,n_{m(s)G},C_{01},..,C_{0m})$ » », les $n_{j(h)G}$ et $n_{m(h)G}$ constituant $n_{1G},..,n_{pG}$. $n_{1G},..,n_{pG}$ étant identifiés simultanément à $n_{10G},..,n_{p0G}$, $C_{n10G,.,np0G}$ sera le concept général non-flou pouvant représenter tout O_0 tel que $R_{nj(1)0G,..,nj(r)0)G}$ $(O_0, n_{m(1)0G},..,n_{m(s)0G},C_{01},..,C_{0m})$.

On dira que P_{i+1} est la définition du concept général non-flou paramétré $C_{n1G,.,npG}$.

On pourra aussi utiliser des propositions du type :
$Q_{i,1}$(R) « R_G est un concept relationnel général représentant une unique une relation non-floue (d'ordre de multiplicité n_G) » (n_G étant un concept général représentant un unique naturel non nul). (Les parenthèses indiquent que les temes qu'elles contiennent peuvent être omis).
$Q_{i,1}(R_{n1G,..,nkG})$: « $R_{n1G,..,nkG}$ est une relation non-floue flottante de paramètres $n_{1G},..,n_{kG}$ ».
$Q_{i,1}(R_{n1G,..,nkG})$: « R est la relation non-floue induite par $R_{n1G,..,nkG}$. »

La proposition Platoniste relationnelle précédente signifiera que R est une relation non-floue telle que pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{k+10}$,

« $R(O_{10},..,O_{k+10})$ est vraie est équivalent à $n_{G1},\dots,n_{Gk}$ peuvent être identifiés simultanément avec $O_{10G},..,O_{k0G}$ et $R_{O10G,..,Ok0G}(O_{k+10})$ est vraie ». On justifie aisément que R est une relation non-floue.

Pour exprimer une définition récursive, on utilisera :
$Q_{i,1}(t_{0DR})$: « t_{0DR} est un concept général non-flou (flottant) premier terme de la définition récursive D_R ».
$Q_{i,1}(D_{PRDR})$: « D_{PRDR} (ou $D_{PRDRGn1G,..,nkG}$) est la relation non-floue (flottante) propriété récursive de D_R »
$Q_{i,1}(D_{RCDR})$: « D_{RCDR} (ou $D_{RCDRGn1G,..,nkG}$) est la relation non-floue(flottante) clause de récursion de D_R ».

Si on définit D_R en utilisant les concepts généraux flottants $n_{G1},\dots,n_{Gk}$, (par exemple si t_{0DR} est un concept général flottant) alors « est un terme de D_R » sera identifiée avec une relation non-floue flottante $R_{nG1,..,nGk}$.

On dira que les propositions précédentes $Q_{i,1}$ sont des *propositions Platonistes relationnelles*.

Si toutes les propositions précédant $Q_{i,1}$ dans le texte T considéré sont vraies, alors on dira $Q_{i,1}$ est vrai dans le texte T sur C et $Pl_C(Q_{i,1})=Q_{i,1}$. Sinon, on dira que $Q_{i,1}$ n'est pas vraie (ou est fausse) dans le texte T sur C et $Pl_C(Q_{i,1})=\emptyset$.

Après une proposition Platoniste relationnelle du type $Q_{i,1}$(un C_1) ou $Q_{i,1}(F)$ ou $Q_{i,1}(R_G)$, une proposition mathématique simple du texte T considéré pourra utiliser « F », « R_G » ou « un C_1 ».

d)On a vu que $O(O_1,..,O_n)$ étant un concept particulier non-flou, on pouvait définir $O(O_1,..,O_n)$ *sans paramètres fixes* qui était un concept général non-flou. On pourra donc utiliser ce type de concept général non-flou dans des propositions pour définir des concepts généraux non-flous ou des relations non-floues.

e)On admettra par définition que dans tout texte vrai $T(P_1,..,P_n)$ et dans tout code Platoniste C, pour qu'une proposition P_i puisse utiliser un concept particulier non-flou pré-défini O_1, on doit avoir une proposition vraie P_j avec j<i telle que P_j est constituée d'une unique définition auxiliaire principale définissant O_1.

f)On verra plus loin qu'un texte T pourra contenir aussi des propositions mathématiques appelées *propositions mathématiques conditionnelles* et de la forme Cond(« Q_{H1}») ou Cond(« Q_{H1} »)/../Cond(« Q_{Hp}») ou U_i/Cond(« Q_{H1} »)/../Cond(« Q_{Hp} »), U_i, Q_{Hj} étant des propositions ne contenant pas « Cond ». On verra plus loin que de telles propositions mathématiques conditionnelles pourront avoir des signfications Platonistes qui sont des propositions Platonistes ou alternativement des *propositions Platonistes conditionnelles* (qu'on définira plus loin) ou l'ensemble vide, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C. La chaîne de caractère « Cond » ne pourra pas êtrev employée dans une chaîne de caractères constituant un concept général non-flou ni une relation non-floue.

g)On a donné les règles syntaxiques du code Platoniste C permettant d'obtenir la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple non-flottante, c'est-à-dire n'utilisant pas de concepts généraux flottants. On généralise facilement ces règles syntaxiques permettant d'obtenir la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple flottante en remplaçant les relations non-floues utilisées dans les propositions élémentaires Platonistes par des relations non-floues flottantes de type $R_{n1G,..,npG}$. Celles-ci pourront être utilisées pour définir des concepts généraux non-flous flottants ou des concepts généraux non-flous paramétrés.

Considérons une proposition mathématique simple flottante $P_i(n_{1G},..,n_{kG},O_1,..,O_n)$, les n_{hG} étant des concepts généraux non-flous flottants pré-définis et les O_h des concepts particuliers non-flous pré-définis ou des concepts particuliers non-flous paramétrés de paramètres parmi $n_{1G},..,n_{kG}$, certains n_{hG} pouvant être utilisés dans P_i comme paramètres de relation non-floue flottante ou de concepts généraux paramétrés.

Alors d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C on obtiendra la signification Platoniste $Pl_C(P_i(n_{1G},..,n_{kG},O_1,..,O_n))$ en obtenant, pour tout $n_{10G},..,n_{k0G}$ auxquels on peut identifier $n_{1G},..,n_{kG}$, la signification Platoniste $Pl_C(P_i(n_{10G},..,n_{k0G},O_1,..,O_n))$, celle-ci étant identifiée avec une

proposition mathématique simple non-flottante, dans laquelle les concepts généraux non-flous flottants isolés sont identifiés avec des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet, les relations non-floues flottantes dont identifiées avec des relations non-floues et les concepts généraux non-flous paramétrés, sauf dans le cas où ils peuvent représenter un unique objet, avec des concepts généraux non-flous pouvant représenter au moins 2 objets, même si dans certains cas ils ne peuvent en représenter qu'un seul. Ceci a par exemple comme conséquence que si $C_{m(1)G,..,m(p)G}$ est un concept général non-flou paramétré on ne pourra utiliser $C_{m(1)0G,.,m(p)0G}$ dans une proposition élémentaire Platoniste de type P_{elij} : $R(C_{m(1)0G,..,m(p)0G},O_{h(1)},..,O_{h(r)})$, sauf dans le cas où $C_{m(1)0G,..,m(p)0G}$ peut représenter un unique objet pour tous $m_{(1)0G},..,m_{(p)0G}$ auxquels on peut identifier simultanément $m(1)_G,..,m(p)_G$.

Alors d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, $Pl_C(P_i(n_{1G},..,n_{kG},O_1,..,O_n))$ sera constitué de propositions élémentaires Platonistes et de propositions élémentaires Platonistes flottantes et telle que, pour tous $n_{10G},.,n_{k0G}$ auxquels $n_{1G},..,n_{kG}$ peuvent être identifiés simultanément, $Pl_C(P_i(n_{1G},..,n_{kG},O_1,..,O_n))_{n10G,..,nk0G}$ (Obtenu en remplaçant dans $Pl_C(P_i(n_{1G},..,n_{kG},O_1,..,O_n))$ chaque n_{jG} par n_{j0G}) soit identique à $Pl_C(P_i(n_{10G},..,n_{k0G},O_1,..,O_n))$.

D'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C, si il existe $n_{10},.,n_{k0}$ tels que $n_{1G},..,n_{kG}$ peuvent être identifiés simultanément à $n_{10G},.,n_{k0G}$ et $Pl_C(P_i(n_{10G},..,n_{k0G},O_1,..,O_n)$ est identique à l'ensemble vide, alors on aura $Pl_C(P_i(n_{1G},..,n_{kG},O_1,..,O_n))$ est identique à l'ensemble vide.

Cependant les propositions mathématiques simples non-flottantes seront beaucoup plus utilisées que les propositions mathématiques simples flottantes. On utilisera ces dernières en général seulement si on utilise l'Axiome de récursion. C'est pourquoi dans ce qui suit, sauf indication contraire on considèrera seulement des propositions mathématiques simples non-flottantes.

h)On définit une *proposition mathématique mixte* exactement de la même façon qu'une proposition mathématique simple, mais comme une proposition qui n'est pas une propostion mathématique simple et qui peut utiliser des *concepts particuliers mixtes non-flous* et des *concepts généraux mixtes non-flous*, (ceux-ci étant définis de la même façon que des concepts particuliers non-flous et des concepts généraux non-flous mais pouvant représenter des objets mathématiques relationnels ou non-relationnels mixtes) et *des relations mixtes non-floues* (celles-ci étant définies de la même façon que des relations non-floues mais pouvant être vraies pour des objets mathématiques non-relationnels mixtes ou des objets mathématiques relationnels). Il en résulte qu'une proposition mathémtique mixte est non-floue. D'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, on obtiendra la signification Platoniste d'une proposition mathématique mixte P de la même façon que pour une proposition mathématique simple. $Pl_C(P)$ pourra être une *proposition Platoniste mixte stable*, définie comme une proposition Platoniste mais pouvant utiliser une relation mixte non-floue ou(et) des concepts particuliers mixtes non-flous. En général, on pourra toujours éviter l'utilisation de proposition mathématique mixte, sauf dans les fondements de la TMP.

REMARQUE 2.23A :

a)On remarque qu' « une proposition stable Platoniste » n'est pas un concept général non-flou car on ne l'a pas associé à une définition générale non-floue. De même R_C n'est pas non plus une relation non-floue. R_C et « une proposition Platoniste » ou « un concept particulier non-flou » sont des outils para-mathématiques permettant d'étudier les objets de l'EMP.

b)(S,R_C) étant un code Platoniste, un texte sur S noté T pourra donc contenir des propositions mathématiques simples, le code C permettant d'obtenir leur signification Platoniste, et des propositions mathématiques relationnelles. P_i étant une proposition d'un texte T sur un code C, pour obtenir $Pl_C(P_i)$, le code C utilisera $Pl_C(P_1),..,Pl_C(P_{i-1})$, mais aussi les propositions $Q_{j,1}$ avec $j<i$, et aussi l'hypothèse de C noté H(C).

c)Dans ce qui suit on pourra noter $T(P_1,.,P_n)$ un texte sur un code C sans expliciter les propositions Platonistes relationnelles de type $Q_{i,1}$ contenues par T.

d)L'Axiome 2.5Adu premier article [1] est alors une conséquence de la définition d'une proposition mathématique simple vraie telle qu'on l'a donné dans la section 2.23. En effet, P_i étant une proposition d'un texte $T(P_1,.,P_n)$ sur un code C, avec $P_1,..,P_{i-1}$ vraie, si P_i est une proposition mathématique simple irréductible, P_i est équivalente ou(exclusif) n'est pas équivalente à une proposition Platoniste (A cause de la règle syntaxique finale du code Platoniste C). De plus, si P_i est équivalente à une proposition Platoniste $Pl_C(P_i)$, alors d'après un Théorème fondamental $Pl_C(P_i)$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, tous les $Pl_C(P_i)$ étant équivalentes. Et donc, puisque si P_i n'est pas équivalente à une proposition Platoniste alors P_i n'est pas vraie (exclusivement), on a bien P_i est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. On généralise immédiatement le cas où P_i n'est pas irréductible. On peut cependant éviter l'utilisation de la dernière règle syntaxique du code Platoniste C pour le démontrer. En effet on a nécessairement P_i a une signification Platoniste qui est une proposition Platoniste ou P_i n'a pas une signification Platoniste qui est une proposition Platoniste. (Car par définition, si on n'est pas dans le 1[ier] cas ,on est dans le second). Or les 2 cas entraînent que P_i est vrai ou(exclusif) n'est pas vraie. Et donc d'après la signification du concept relationnel primitif « entraîne », on obtient que P_i est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. Notons que puisque par définition, si on a « P_i a une proposition Platoniste stable comme signification Platoniste dans le code Platoniste C» alors on n'a pas « P_i n'a pas une Proposition Platoniste stable comme signification Platoniste dans le code Platoniste C », on a bien « P_i a comme signification Platoniste une Proposition Platoniste stable » ou (exclusif) « P_i n'a pas une proposition Platoniste stable comme signification Platoniste dans le code C » , même si le code C ne contient pas la dernière règle syntaxique qu'on a donnée..

On utilise pour obtenir le résultat précédent le résultat fondamental qui est que d'après la définition des propositions auxiliaires principales et des définitions auxiliaires principales, si $Pl_C(P_i)$ est une proposition Platoniste stable toutes les significations Platonistes de P_i sont équivalentes. On pourra démontrer formellement ce point par récurrence sur le niveau maximal des définitions auxiliaires contenues par P_i, commençant par l'hypothèse que toutes les propositions auxiliaires principales contenues par P_i sont irréductibles (Et donc sans définition auxiliaire). On dira alors que toutes ces propositions auxiliaires principales sont *de degré* 0. Puis on montre que ceci est vrai certaines propositions auxiliaires principales étant *de degré* 1, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas irréductibles mais et que les définitions auxiliaires qu'elles contiennent (strictement) sont de niveau maximal 0. On généralise immédiatement la définition de *degré d'une proposition auxiliaire principale*, et on montre alors par récurrence sur le degré des propositions auxiliaires principales contenues par P_i que toutes les significations Platonistes de P_i sont équivalentes, quel que soit le degré des propositions auxiliaires principales qu'elle contient.

On établit par récurrence le point précédent de la même façon que pour le cas de définition auxiliaires de niveau maximal 0 et des propositions auxiliaires principales de degré maximal 0 :

Supposant P_1 proposition irréductible première proposition d'un texte, on considère 2 significations Platonistes de P_1 $Pl_{CA}(P_1)$: $(Pel_{1A},..,Pel_{pA})$ et $Pl_{CB}(P_1)$:$(Pel_{1B},..,Pel_{pB})$ qui sont des propositions Platonistes stables. On montre alors que « $P_{CA}(P_1)$ est vraie » est équivalent à « $Pl_{CB}(P_1)$ est vraie ». Pour cela, on suppose $Pl_{CA}(P_1)$ vraie.

On montre alors par une récurrence sur i :

-Si Pel_{iA} est un proposition élémentaire Platoniste de type définition Pel_{iA} :$Def(O_i),R_{iA}(O_i,D_1,..,D_k)$, alors nécessairement :

(i)Pel_{iB} est nécessairement une proposition élémentaire Platoniste de type Pel_{iB} ;$Def(O_i),R_{iB}(O_i,D'_1,.,D'_k)$, $D'_1,.,D'_k$ étant les mêmes symboles que $D_1,.,D_k$, avec pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i0},D_{10},..,D_{k0}$, $R_{iA}(O_{i0},D_{10},.,D_{k0})$ est équivalent à $R_{iB}(O_{i0},D'_{10},.,D'_{k0})$.

(ii)Si $S_1,..,S_{n(i)}$ sont des concepts particuliers non-flous définis dans $(Pel_{1A},..,Pel_{iA})$, alors pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $S_{10},.,S_{n(i)0}$, $S_1,..,S_{n(i)}$ définis dans $Pl_{CA}(P_1)$ peuvent représenter simultanément $S_{10},..,S_{n(i)0}$ est équivalent à $S_1,..,S_{n(i)}$ définis dans $Pl_{CB}(P_1)$ peuvent représenter simultanément $S_{10},.,S_{n(i)0}$.

(iii)« Pel_{iA} est vraie » est équivalent à « Pel_{iB} est vraie ».

-Si Pel_{iA} est une proposition élémentaire Platoniste de type relation ou relation composée, correspondant à une proposition auxiliaire principale $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,..,C_p)$ ou P_{aux}, conservant les notations de la section 2.23, alors Pel_{iA} et Pel_{iB} sont équivalentes.

Pour montrer les points précédents, il sera utile d'introduire dans le cas où Pel_{iA} est une signification Platoniste relationnelle composée de $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,..,C_p)$, une proposition élémentaire Platoniste de type relation (non-composée) naturellement associée à la proposition élémentaire de type relation composée Pel_{iA}, et donc de la forme $R_{iAC}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ ou $R_{iAC}(D_1,.,D_k,C_1,.,C_p,1,2)$.

On généralise immédiatement ce qui précède :
-P_1 n'étant pas irréductible.
-Si on remplace P_1 par une proposition mathématique simple $P_i(O_1,.,O_p)$, les propositions précédant P_i étant vraies.
-Si on remplace $Pl_C(P_1)$ par $Pl_{CG}(P_{aux}(O_{10},.,O_{p0}))$, $P_{aux}(O_1,.,O_p)$ étant une proposition auxiliaire pouvant donc utiliser des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large O_j qui ne sont pas des concepts particuliers non-flous.
-Si on remplace P_1 par une proposition auxiliaire à l'intérieur d'une définition auxiliaire. (On a vu alors que sa signification Platoniste ne s'obtenait pas de la même façon que celle de P_1).
.

La relation R_C d'un code Platoniste C permet donc d'obtenir le contenu mathématique d'une proposition mathématique simple (Si elle en possède). Les règles syntaxiques qu'on a données en 2.23 permettent d'obtenir une signification Platoniste qui est une proposition Platoniste stable pour la plupart des propositions mathématiques simples couramment utilisées en mathématique.

e)On pourra aussi considérer que les règles définissant une proposition mathématique simple données dans la section 2.5 du premier article sont des règles syntaxiques du code Platoniste C. En effet, on a vu que pour qu'une proposition P puisse avoir une signification Platoniste $Pl_C(P)$ qui soit une proposition Platoniste avec donc $PR_CPl_C(P)$, P était nécessairement une proposition mathématique simple. Par exemple les *règles syntaxiques de convention (symbolique)* mais aussi les *règles de ponctuation* et des *règles d'utilisation des concepts primitifs relationnels* constituent des règles syntaxiques du code Platoniste C.

On a les exemples suivants de règles syntaxiques de convention symbolique : f et a étant des symboles particuliers pré-définis « f(a) » aura la signification de « im(f,a) ». a et b étant des symboles particuliers pré-définis et R un symbole représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité 2, « aRb » aura la signification de « R(a,b) ». A étant un concept particulier pouvant représenter seulement des (ou un) ensemble, « Pour tout x élément de A » aura la même signification que « Pour tout x tel que x est élément de A ». a et b étant des symboles particuliers pouvant représenter seulement des éléments de **N**, « ab » aura la même signification que « $\times_{\mathbf{N}}(a,b)$ ». (Et de même pour des éléments de **Z**,**Q** ou **R**).

On admettra, dans tout code Platoniste C, toutes les règles syntaxiques induites par les conventions symboliques universellement admises dans toutes les théories mathématiques classiques.

f)Si on a une proposition auxiliaire du type P_{aux1} : « Il existe un et un seul x tel que $P_1(x,O_1,.,O_n)$ », avec une relation non-floue d'ordre de multiplicité n+1 R_1 telle que pour tous objets non-relationnels et différents de l'EMP $x_0,O_{10},..,O_{n0}$, « $P_1(x_0,O_{10},..,O_{n0})$ est équivalent à $R_1(x_0,O_{10},..,O_{n0})$ » alors d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, P_{aux1} aura $Pl_C(P_{aux1})(P_{el1},P_{el2},P_{el3})$ comme signification Platoniste avec : P_{el1} :Def(x),$R_1(x,O_1,.,O_n)$, P_{el2} :Def(y),$R_1(O_1,.,O_n)$, P_{el3} :=(x,y).

On aura donc une exception à une règle introduite en 2.23 puisque $Pl_C(P_{aux1})$ définira le symbole particulier « y » qui n'est pas défini dans P_{aux1}. Cepndant on utilisera la notation $Pl_C(P_{aux1})$: (P_{el1S}), avec P_{el1S} :$Def_{1S}(x)$,$R_1(x,O_1,..,O_n)$, et avec cette notation le symbole « y » sera implicitement utilisé par $Pl_C(P_{aux1})$.

g)On pourra vérifier que les Axiomes propositions mathématiques simples ou équivalentes à des propositions mathématiques simples introduits dans le 1ier article auront tous des significations Platonistes qui sont des propositions stables Platonistes.

DEFINITION 2.24 :

Soit $C(S,R_C)$ un code Platoniste, et P_i une proposition d'un texte $(P_1,..,P_n)$.

Si $Pl_C(P_i)$ est une proposition Platoniste stable (resp vraie, fausse) on dira que P_i est *stable* (resp.*vraie*, *fausse*) dans le texte T sur le code C (ou dans (T,C)). Sinon on dira que P_i est *instable* dans (T,C). (On écrira seulement « stable (ou vraie,fausse, instable) dans T » si on a introduit un seul code C et seulement « stable » si on a introduit un seul code C et un seul texe T).

Une conséquence du Lemme 2.18 est le Lemme :

LEMME 2.25 :

Si on a une proposition P_i d'un texte $T(P_1,..,P_n)$ et un code C :

a)Si P_i est stable, P_i est vraie ou P_i est fausse.

b)Si P_i est stable P n'est pas vraie et fausse.

On voit que le Lemme 2.25 peut être considéré comme le Principe du Tiers exclu et le Principe de Non-contradiction pour les propositions dans la Théorie de logique Platoniste(TLP). Cependant, dans cette théorie ce sont des Lemmes justifiés théoriquement et conséquences des Axiomes de la TLP, alors qu'ils sont admis axiomatiquement dans les théories mathématiques de logique formelle.

DEFINITION 2.26 :

(S,R_C) étant un code Platoniste, $T(P_1,..,P_n)$ étant un texte sur S, on dira que $T(P_1,..,P_n)$ est *un texte vrai (dans C)* si pour tout i dans {1,..,n} P_i est vraie (dans (C,T)). On dira aussi que l'ensemble vide est un Texte vrai dans tout code Platoniste C.

REMARQUE 2.27 :

Une conséquence immédiate du Lemme 2.25, est que dans un code C, tout texte T est ou bien vrai ou bien n'est pas vrai, et ne peut pas être vrai et n'être pas vrai.

DEFINITION 2.28 :

(S,R_C) étant un code Platoniste C et $T(P_1,..,P_n)$ étant un texte vrai dans C, on dira que Q est *une déduction logique relationnelle* de $T(P_1,….,P_n)$ si on a d'après les relations exprimées par $Pl_C(P_1)$,..,$Pl_C(P_n)$: « Q est vraie dans $(P_1,.,P_n,Q)$ », c'est à dire « H(C), $Pl_C(P_1)$,..,$Pl_C(P_n)$ vraies » entraînent « Q est vraie dans $(P_1,.,P_n,Q)$) ». (« entraîne » est un concept primitif qu'on a déjà utilisé).

REMARQUE 2.29 :

Le concept primitif de *déduction logique relationnelle* est important car c'est toujours cette sorte de déduction logique qui est utilisé en mathématique.

DEFINITION 2.30 :

(S,R_C) étant un code Platoniste, et T $(P_1,..,P_n)$ un texte vrai sur S, on dira que $(Q_1,..,Q_k)$ est une *démonstration sur* T dans C de Q_k si Q_1 est déduction logique relationnelle de T , et pour tout i dans {2,..,k}, Q_i est déduction logique relationnelle de $(T,Q_1,..,Q_{i-1})$.

D'après la définition d'une déduction logique relationnelle donnée en 2.28, on a alors $(T,Q_1,\dots,Q_k)$ est un texte vrai. Par convention on utilisera le terme « démonstration », seulement si $Q_1,..,Q_k$ sont des déductions logiques relationnelles évidentes.

DEFINITION 2.31 (DEMONSTRATION PAR RECURRENCE) :

T étant un texte vrai dans un code C, supposons qu'on ait une proposition P_{REC} : « Pour tout n dans **N***, P(n) », avec P(n) proposition utilisant n comme seul concept particulier prédéfini et P_{REC} proposition mathématique simple équivalente à une proposition stable Platoniste dans (T,P_{REC}). Un texte vrai contenant T pourra utiliser une démonstration par récurrence sur T , définie par :

$(R_1,..,R_{k+1})$ est une *démonstration par récurrence* sur T de P_{REC} si :

-$(R_1,..,R_s)$ est une démonstration sur T de P(1). (pour un naturel s donné dans {1,..,k-3})
-$R_{s+1},..,R_{k+1}$ sont des propositions vraies du type, $U_{s+3},..,U_k$ étant des propositions ne contenant pas « Cond », et telles que, dans $(R_1,\dots,R_{s+2}, U_{s+3},..,U_k)$ pour tout j parmi s+3,..,k, si $Pl_C(U_j)\neq Ø$, alors U_j est une proposition mathématique simple.

R_{s+1} : Soit n élément de **N***
R_{s+2} : Cond(P(n)).
R_{s+3} : U_{s+3}/Cond(P(n))
…
R_k : U_k/Cond(P(n)) (U_k étant la proposition P(n+1)).
R_{k+1} :P_{REC}.

(On dira que $R_{s+2},..,R_k$ sont des *propositions mathématiques conditionnelles (simples)* .On pourra généraliser la définition précédente R_1 étant précédé d'un texte vrai $T_0(S_1,..,S_p)$).

On aura par définition d'une démonstration par récurrence, si P(n) est vraie dans $(T,R_1,.,R_{s+1},P(n))$, U_{s+3} est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de $(T,R_1,..,R_{s+1},P(n))$. Pour tout i dans {s+4,..,k}, si P(n) est vraie dans $(T,R_1,.,R_{s+1},P(n))$. U_i est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de $(T, R_1,..,R_{s+1}, P(n), U_{s+3},.,U_{i-1})$.

Par définition, dans tout code Platoniste, R_{s+2} :Cond(P(n)) sera vraie si P(n) est une proposition mathématique simple équivalente à une proposition Platoniste stable (Ce qui est vrai par hypothèse). De plus, R_{s+2} étant vraie, pour j>s+2, R_j :U_j/Cond(P(n)) sera vraie dans $(R_1,..,R_j)$ si on a « P(n) n'est pas vraie dans $(R_1,..,R_{s+1},P(n))$ (c'est-à-dire Non(P(n)) vraie dans $(R_1,.., R_{s+1}$,Non(P(n))) » ou « P(n) est vraie dans $(R_1,..,R_{s+1},P(n))$ et $U_{s+3},..,U_j$ sont des propositions mathématiques simples vraies dans $(R_1,.R_{s+1},P(n),U_{s+3},..,U_j)$ » (Ce qui est nécessairement vrai par hypothèse). Si P(n) est équivalent à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie, R_j aura comme signification Platoniste Pl_C(Non(P(n))), de même que Cond(P(n)). Si P(n) est vraie de même que $R_1,..,R_{j-1}$, R_j aura comme signification Platoniste $Pl_C(U_j)$, signification Platoniste de U_j dans $(R_1,.,R_{s+1},P(n), U_{s+3},..,U_j)$. Alors si on avait eu R_j n'est pas vraie (C'est-à-dire U_j n'est pas vraie), on aurait eu alors $Pl_C(R_m)=Ø$ pour m>j. Si P(n) est une proposition mathématique simple vraie, Cond(P(n)) aura Pl_C(P(n)) comme interprétation Platoniste. Une conséquence des définitions précédentes est qu'on aura nécessairement dans une démonstration par récurrence $R_1,.,R_k$ seront vraies. De plus R_{k+1} sera une déduction logique relationnelle évidente de $(R_1,..,R_k)$.

On pourra cependant éviter l'utilisation de propositions mathématiques conditionnelles en considérant la proposition vraie R_{As+2} : « n est tel que « n est élément de **N** et P(n) » » et en considérant le texte vrai $(R_1,.,R_s, R_{As+2},U_{s+3},..,U_k)$ ou en remplaçant « U_i/Cond(P(n) » par « si P(n) alors U_i ».

On pourra remplacer P(n) par $P(n,O_1,..,O_p)$, $O_1,..,O_p$ étant des concepts particuliers pré-définis.

Dans tout code Platoniste C, d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C, les propositions de la séquence définie précédemment $(R_{s+2},..,R_k)$ auront la même signification Platoniste que les propositions de la séquence finie (« On suppose P(n) »,$U_{s+3},..,U_k$).

R_{k+2} étant une proposition qui n'est pas une proposition mathématique conditionnelle, R_{k+2} sera vraie dans $(R_1,..,R_{k+2})$ si et seulement si R_{k+2} est vraie dans $(R_1,..,R_s,R_{k+1},R_{k+2})$.

On aurait aussi alternativement pu admettre que Pl_C(Cond(P(n)) a comme signification Platoniste *la proposition Platoniste conditionnelle* Cond(Pl_C(P(n)), Pl_C(P(n)) étant la signification Platoniste de P(n) dans (R_1,..,R_{s+1}, P(n)). Cond(Pl_C(P(n)) sera alors vraie si Pl_C(P(n)) est une proposition stable Platoniste (Ce qui est vrai par hypothèse). Cond(P(n)) étant vraie si pour j tel que j>s+2 on a R_1,..,R_{j-1} sont vraies, R_j :U_j/Cond(P(n)) aura comme signification Platoniste la *proposition Platoniste conditionnelle* Pl_C(U_j)/Cond Pl_C(P(n)), Pl_C(U_j) signification Platoniste de U_j dans (R_1,..,R_{s+1},P(n), U_{s+3},..,U_j). R_j sera vraie si Pl_C(P(n)) est une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie ou si Pl_C(P(n)) est une proposition Platoniste vraie de même que Pl_C(U_j). Si R_j n'est pas vraie on aura Pl_C(R_m)= Ø si m>j. Les valeurs de vérité des R_j demeureront donc les mêmes dans les 2 cas.

DEFINITION 2.32 (DEMONSTRATION PAR L'ABSURDE) :

Soit T un texte vrai dans un code C et Q_H une proposition équivalente à une proposition stable Platoniste P_{lC}(Q_H) dans (T,Q_H). Un texte vrai contenant T pourra contenir une démonstration par l'absurde sur T définie par :
(R_1,..,R_{k+2}) est une *démonstration par l'absurde (simple)* sur T de Non(Q_H) si R_1,..,R_{k+2} sont des propositions vraies du type (on dira qu'elles sont des propositions conditionnelles simples), U_2,..,U_{k+1} étant des propositions ne contenant pas « Cond » et telles que dans (T,Q_H,U_2,…,U_{k+1}), pout tout j parmi 2,..,k+1, si Pl_C(U_j)≠Ø, alors U_j est une proposition mathématique simple.

R_1 :Cond(Q_H)
R_2 :U_2/Cond(Q_H)
…
R_k :U_k/Cond(Q_H)
R_{k+1} :U_{k+1}/Cond(Q_H), Avec U_{k+1} est la proposition Non_G(U_k)
(Avec « Non(U_k) » définie comme la négation de U_k c'est-à-dire « Pl_C(Non_G(U_k)) est vraie » est équivalent à « Pl_C(U_k) n'est pas vraie »).
R_{k+2} :Non_G(Q_H).

U_2,..,U_{k+1} vérifiant :
Si Q_H est vraie dans (T,Q_H), U_2 est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de (T,Q_H). Pour j dans {3,.,k+1}, si Q_H est vraie dans (T,Q_H), U_j est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de (T,Q_H,U_2,..,U_{j-1}). R_1,..,R_{k+1} seront des *propositions mathématiques conditionnelles (simples))*.

Comme dans la section précédente, par définition, dans tout code Platoniste C, R_1 :Cond(Q_H) sera vraie si Q_H est équivalent à une proposition platoniste stable dan (T,Q_H) (Ce qui est vrai par hypothèse). R_1 étant vraie, R_j :U_j/Cond(Q_H) sera vraie si on a « Q_H n'est pas vraie (C'est-à-dire Non(Q_H) est vraie) » ou « Q_H est vraie et U_2,..,U_j sont des propositions mathématiques simples vraies dans (Q_H,U_2,..,U_j) » (Ce qui est nécessairement vrai par hypothèse). Dans le cas où Non_G(Q_H) est vraie, par définition, R_1,.,R_{k+2} seront donc vraies et auront par définition pour signification Platoniste, dans tout code Platoniste C, Pl_C(Non_G(Q_H)). Si Q_H est vraie, Cond(Q_H) aura Pl_C(Q_H) comme signification Platoniste et R_1,..,R_{j-1}, étant vraies, R_j aura Pl_C(U_j) comme signification Platoniste, Pl_C(U_j) étant la signification Platoniste de U_j dans (Q_H,U_2,..,U_j). Si on avait eu que R_j n'est pas vraie, on aurait eu alors Pl_C(R_m)=Ø pour m>j. Il en résulte que dans une démonstration par l'absurde telle que définie plus haut, R_1,.., R_{k+1} seront toujours vraies dans (R_1,…,R_{k+1}).

Supposons que Q_H soit vraie dans (T,Q_H). Alors U_k et Non_G(U_k) sont vraies ce qui est impossible car si Q_H est vraie Pl_C(U_k) est une proposition Platoniste stable et donc Pl_C(U_k) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. Ceci justifie que R_{k+2} soit déduction logique relationnelle évidente de (T,R_1,.,R_{k+1}). R_{k+3} étant une proposition qui n'est pas une proposition mathématique conditionnelle, R_{k+3} sera vraie dans (R_1,..,R_{k+3}) si et seulement si R_{k+3} est vraie dans (R_{k+2},R_{k+3}). On aurait pu remplacer U_i/Cond(Q_H) par « si_G Q_H $alors_G$ U_i ».

On aurait pu alternativement admettre que dans le cas où (R_1,..,R_{j-1}) sont vraies, la signification Platoniste de R_j :U_j/Cond(Q_H) est la proposition Platoniste conditionnelle Pl_C(U_j)/Cond(Pl_C(Q_H)), définie de façon analogue à la section précédente.

Dans tout code Platoniste C, les propositions de la séquence définie précédemment $(R_1,..,R_{k+1})$ auront la même signification Platoniste que les propositions de la séquence (« On suppose Q_H »,U_2,..,U_{k+1}). On pourra utiliser aussi des propositions équivalentes à des propositions conditionnelles simples pour montrer des propositions du type « Si P_1 alors P_2 » ou « P_1 est équivalent à P_2 », P_1 et P_2 étant équivalentes à des propositions Platonistes stables.

On pourra définir une démonstration par l'absurde de niveau 1 de la manière suivante :
Considérons le texte suivant, les Uj étant définies comme précédemment dans $(T,Q_H,R_H,U_3,..,U_{k+1})$:

P_1 :Cond(Q_H)
P_2 :Cond(R_H)/Cond(Q_H)
P_3 :U_3/Cond(R_H)/Cond(Q_H)
..
P_k :U_k/Cond(R_H)/Cond(Q_H)
P_{k+1}:U_{k+1}/Cond(R_H)/Cond(Q_H).
P_{k+2} :Non_G(R_H)/Cond(Q_H).

On dira que P_2,..,P_{k+1} sont *des propositions mathématiques conditionnelles* (*de niveau 1*).
On suppose que Q_H est équivalente à une proposition stable Platoniste et que si Q_H est vraie, alors R_H est équivalente à une proposition stable Platoniste dans (Q_H,R_H).
On suppose aussi que si Q_H et R_H sont vraies dans (Q_H,R_H), alors pour j parmi 3,..,k+1 U_j est une proposition mathématique simple déduction logique relationnelle (par convention évidente) de $(Q_H,R_H,U_3,..,U_{j-1})$ et que de plus si Q_H et R_H sont vraies dans (Q_H,R_H), alors dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_{k+1})$, $Pl_C(U_k)$ est équivalent à $Non_G(Pl_C(U_{k+1}))$.
Alors on aura P_{k+2} déduction logique relationnelle évidente de $(P_1,.,P_{k+1})$ et on dira que $(P_1,..,P_{k+2})$ est une *démonstration par l'absurde (de niveau 1)*.
Par définition des propositions mathématiques conditionnelles, dans tout code Platoniste C, P_1 étant vraie, P_2 :Cond(R_H)/Cond(Q_H) sera vraie si « Q_H n'est pas vraie » ou « Q_H est vraie et R_H est une proposition mathématique simple équivalente à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie dans (Q_H,R_H) » ou « Q_H et R_H sont des propositions mathématiques simples vraies dans (Q_H,R_H) » (Ce qui est nécessairement vrai d'après l'hypothèse).
P_1 et P_2 étant vraies, P_j :U_j/Cond(R_H)/Cond(Q_H) sera vraie si « Q_H n'est pas vraie » ou « Q_H est vraie et R_H n'est pas vraie » dans (Q_H,R_H) ou « Q_H est R_H sont vraies dans (Q_H,R_H) et U_3,.,U_j sont vraies dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_j)$ » (Ce qui est nécessairement vrai d'après l'hypothèse). P_1,.,P_{j-1} étant vraies, si on avait eu que P_j n'est pas vraie, on aurait alors eu P_m n'est pas vraie et $Pl_C(P_m)=\emptyset$ pour m>j.
Par définition des propositions mathématiques conditionnelles, dans tout code Platoniste C, si Q_H est équivalente à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie, alors pour j parmi 2,..,k+1, $Pl_C(P_j)$ sera $Non_G(Pl_C(Q_H))$, si Q_H est équivalente à une proposition stable Platoniste qui est vraie et R_H est équivalent à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie dans (Q_H,R_H) pour j dans 3,..,k+1, $Pl_C(P_j)$ sera $Non_G(Pl_C(R_H))$ et si Q_H et R_H sont vraies dans (Q_H,R_H), $Pl_C(P_2)$ sera $Pl_C(R_H)$ et pour j parmi 3,..,k+1, P_1,..,P_{j-1} étant vraies, P_j aura comme signification Platoniste $Pl_C(U_j)$ dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_j)$.
On a P_{k+2} déduction logique relationnelle évidente de $(P_1,..,P_{k+1})$ car on est dans l'un des 3 cas suivants:
(i)Si Q_H n'est pas vraie, d'après la définition d'une proposition mathématique conditionnelle dans tout code Platoniste C, P_{k+2} : Non_G(R_H)/Cond(Q_H) est vraie.
(ii)Si Q_H est vraie et R_H n'est pas vraie dans (Q_H,R_H), $Non_G(R_H)$ est vraie dans $(Q_H,Non_G(R_H))$ et donc d'après la définition d'une démonstration par l'absurde simple, P_{k+2} :Non_G(R_H)/Cond(Q_H) est vraie.
(iii)Si Q_H est R_H sont vraies dans (Q_H,R_H) , alors nécessairement P_k et P_{k+1} sont vraies, et donc $Pl_C(U_k)$ et $Non(Pl_C(U_k))$ sont vraies, $Pl_C(U_k)$ signification Platoniste de U_k dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_k)$ ce qui est impossible puisque $Pl_C(U_k)$ est une proposition Platoniste stable.

On aurait pu aussi alternativement admettre que si P_1,.., P_{j-1} sont vraies, P_j :$Pl_C(U_j/Cond(R_H)/Cond(Q_H)$ a comme signification Platoniste la proposition Platoniste conditionnelle $Pl_C(U_j)/Cond(Pl_C(R_H))/Cond(Pl_C(Q_H))$ définie comme précédemment.

On pourra généraliser la définition précédente P_1 étant précédé d'un texte vrai $T_0(S_1,..,S_p)$ sur un code C. $T(R_1,.,R_p)$ étant un texte vrai sur un code C, $R_{t(1)},..,R_{t(q)}$ étant les propositions vraies de T qui ne sont pas des propositions mathématiques conditionnelles avec t(1)<..<t(q), on aura par définition dans tout code Platoniste C que nécessairement ($R_{t(1)},..,R_{t(q)}$) est un texte vrai sur le code C.

Les sections précédentes pourront se généraliser immédiatement aux cas où P(n) ou R_H ou Q_H sont des propositions mathématiques simples flottantes ou des propositions mathématiques mixtes (définies en 2.23), et aux cas où on peut avoir $Pl_C(U_j)\neq Ø$ et U_j est une proposition mathématique simple flottante ou une proposition mathématique mixte.

REMARQUE 2.35 :

a)Si on a une définition non-floue $D(o,O_1,..,O_n)$, alors on peut considérer la proposition élémentaire stable Platoniste de type définition:
P_{Def}:Def(A)
$R(A,O_1,..,O_n)$: A={x tel que $D(x,O_1,.,O_n)$}.

D'après le précédent article [(1)], si $D(o,O_1,..,O_n)$ est basique et non-floue, alors A est un concept existant non-flou défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_n$. La définition précédente est alors vraie.

D'après la définition qu'on a donnée d'un texte vrai, on ne pourra pas définir une relation dans un ensemble A, A étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des ensembles, car les propositions Platonistes ne peuvent pas définir des concepts particuliers mixtes pouvant représenter des objets mathématiques relationnels. On donne la définition suivante permettant d'utiliser implicitement de tels concepts particuliers mixtes.

DEFINITION 2.35 A :(RELATION FONCTIONNELLE)

Une *relation fonctionnelle* est un concept général non-flou pouvant représenter toutes les applications de A×A dans{0,1}, A étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement un ou plusieurs ensembles non vides.

F_A étant une relation fonctionnelle de A×A dans{0,1}, on dira que F_A est une *relation fonctionnelle dans* A. De plus dans tout code Platoniste C, on écrira « xF_Ay » pour « $F_A((x,y))=1$ » et donc Non(« xF_Ay ») pour Non(« $F_A((x,y))=1$ », c'est-à-dire « $F_A((x,y))=0$ ».

On définit alors de façon évidente et analogue avec les définitions classiques les concepts généraux non-flous *une relation fonctionnelle transitive,symétrique, anti-symétrique, d'ordre ou d'équivalence*.

On peut définir alors la fonction-concept « Classe d'équivalence » F_{CE} dont le concept de départ peut représenter tous les couples (x,F_A), avec F_A relation fonctionnelle d'équivalence dans A et x est élément de A, avec :
$F_{CE}((x,A))$={a tel que xF_Aa (c'est-à-dire $F_A((x,a))=1$}.

A pourra être défini en fonction de concepts particuliers non-flous $O_1,..,O_n$ et F_A en fonction de concepts particuliers non-flous $O'_1,..,O'_p$.
Nous allons maintenant donner des exemples illustrant les notions précédentes.

EXEMPLE 2.36A :

On supposera que « un groupe commutatif » et « un corps commutatif » sont des concepts généraux non-flous associés aux définitions classiques de ces concepts.

On pourra définir « un espace vectoriel dans sa forme étendue» avec les propositions stables Platonistes suivantes:

On définit tout d'abord la relation non-floue R_{EV} par la proposition Platoniste relationnelle et la proposition stable Platoniste suivantes :
Q_{REV} : « R_{EV} est une relation non-floue d'ordre de multiplicité 6 ».
P_{REV} :
P_{REVel1} :$Def(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E}),R_{A1}(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E})$: « $(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E},)$ est une séquence finie à 6 termes ».
P_{REVel2} : $R_{A2}(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E})$: « $R_{EV}(+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E})$ est équivalent à (Pel1,…,Pel7)($E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E}$) ».
Avec :

Pel1 :R1($E,+_E$): ($E,+_E$) est un groupe commutatif.

Pel2 :R2($K,+_K,\times_K$) : ($K,+_K,\times_K$) est un corps commutatif.

Pel3 :R3(($E,K, ._{K,E}$): « $._{K,E}$ » est élément de $F(K\times E,E)$.

Pel4: Def4(x,y,α,β) :
R4(x,y,α,β,E,K) : (x,y) est élément de E^2 et (α,β) est élément de K^2.

Pel5 :R5($\alpha,+_K , \beta,._{K,E}$, x):$(\alpha+_K\beta)._{K,E}x= \alpha._{K,E}x+_E\beta._{K,E}x$.

Pel6 :R6($\alpha,._{K,E}, \beta, x, \times_K$) :$\alpha._{K,E}(\beta._{K,E}x)=(\alpha\times_K\beta)._{K,E}x$.

Pel7 :R7 ($\alpha, ._{K,E}, x, +_E, y$) : $\alpha._{K,E}(x+_Ey)=(\alpha._{K,E}x)+_E(\alpha._{K,E}y)$.

On peut identifier par exemple $\alpha._{K,E}x+_E\beta._{K,E}x$ avec un symbole particulier obtenu par une combinaison de fonction-concepts et noté $E(\alpha,+_K , \beta,._{K,E} , x)$. De même pour les autres expressions.

P_{REV} est la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple définissant la relation non-floue R_{EV}.

On définit alors « un espace vectoriel dans sa forme étendue » par la proposition relationnelle Platoniste et la proposition Platoniste suivantes :
Q_{EV} : « « Un espace vectoriel dans sa forme étendue» est un concept général non-flou ».
P_{EV} :
P_{elEV1} :Def(O),R_{B1}(O) :« O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP .
P_{elEV2} :R_{B2}(O) : « O est un espace vectoriel dans sa forme étendue » est équivalent à R_{EV}(O) ».
P_{EV} est la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple définissant « un espace vectoriel dans sa forme étendue ».
Notons que souvent on représente un espace vectoriel sous la forme (E,+,.) qu'on appellera simplement « un espace vectoriel » et on obtient facilement, utilisant le concept général « un espace vectoriel dans sa forme étendue », les propositions stables Platonistes permettant d'établir que c'est aussi un concept général non-flou.
La méthode précédente est générale pour obtenir les propositions stables Platonistes permettant de montrer formellement qu'un symbole est un concept général non-flou ou est un concept relationnel général pouvant représenter une unique relation non-floue.

REMARQUE 2.37 :

En introduisant le concept de *relation mixte* analogue au concept d' une relation non-floue mais pouvant être définie entre des objets mathématiques non-relationnels et des objets mathématiques relationnels (On rappelle que les relations non-floues sont définies uniquement entre des objets mathématiques non-relationnels), il est possible de montrer que tous les Axiomes de la TMP qui ne sont pas des propositions mathématiques simples (Excepté l'Axiome 2.5A du premier article

permettant de justifier qu'une proposition mathématique simple P est non-floue. Mais on a vu que pour cela, il suffisait d'obtenir une signification Platoniste de P qui soit une proposition Platoniste stable.) de même que toutes les définitions d'objets mathématiques non non-relationnels sont équivalents à des relations non-floues mixtes ou à des relations non-floues entre des objets mathématiques qui sont vraies, c'est-à-dire qu'ils peuvent s'exprimer sous la forme de propositions appelées *propositions mathématiques mixtes* équivalentes à des *propositions Platonistes mixtes stable*, celles-ci étant totalement analogues aux propositions Platonistes stables qu'on a définies.

Ainsi on définit « une relation non-floue » par la définition axiomatique suivante, utilisant *le concept relationnel général (non-flou)* « un objet mathématique relationnel », et le *concept mixte général (non-flou)* (C'est-à-dire pouvant représenter des objets mathématiques relationnels, non-relationnels et non-relationnels mixtes) « un objet mathématique » :

DEFINITION 2.37A :

a) « R est une *relation non-floue* » est équivalent à :
« (i) R est un objet mathématique relationnel (On rappelle qu'on a admis dans le premier article [(1)] que tout objet mathématique relationnel était non-flou, c'est-à-dire : « Si R est telle que R est un objet mathématique relationnel, pour tout O tel que O est un objet mathématique, R(O) ou(exclusif) Non(R(O)) »).
(ii)R est la relation impossible ou pour tout O tel que O est un objet mathématique, si R(O) est vraie, alors O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP . »

b)Si n est élément de **N***/{1} et R une relation non-floue, alors « n *est un ordre de multiplicité* de R » est équivalent à :

« R est la relation impossible ou pour tout objet mathématique O tel que R(O) est vraie, O est une séquence finie à n termes. »

c)Si R est une relation non-floue, alors « 1 *est un ordre de multiplicité* de R.

(On rappelle qu'on a montré l'existence de **N** en utilisant seulement des relations non-floues d'ordre de multiplicité 1 et 2).

Notons que dans la définition précédente on peut identifier « *est un ordre de multiplicité de* » à un objet mathématique relationnel défini entre une relation non-floue et un naturel. On pourra admettre que c'est une *relation mixte non-floue*.

On peut exprimer la proposition mathématique mixte précédente définissant une *relation non-floue* sous la forme d'une *proposition mixte stable Platoniste*, analogue à une proposition stable Platoniste. On peut en effet définir une *proposition mixte stable Platoniste* comme étant une séquence de *propositions élémentaires mixtes stables Platonistes* et de propositions élémentaires stables Platonistes, comprenant au moins une *proposition élémentaires mixte stable Platoniste*.

Les propositions mixtes stables Platonistes utiliseront le concept général relationnel non-flou R_{mxf} pouvant représenter un seul et unique objet mathématique relationnel, et tel que pour tout objet mathématique U_0, « $R_{mxf}(U_0)$ est vraie » est équivalent à :
(i)U_0 est de la forme $(R_0,O_0)_m$, avec $(R_0,O_0)_m$ est un *objet mathématique non*-relationnel mixte appelé *couple mixte* de premier terme R_0 objet mathématique relationnel et de 2ième terme O_0 objet mathématique différent de l'EMP.
(ii)$R_0(O_0)$ est vraie.

On utilisera aussi R_{mxf} pour obtenir les propositions stables mixtes Platonistes équivalentes aux propositions mathématiques mixtes suivantes.

L'Axiome d'existence d'un ensemble dont les éléments correspondent à une définition sera exprimé sous la forme :

AXIOME 2.37B :

Si R est une relation non-floue et si il existe A tel que A est un ensemble et pour tout objet U tels que R(U), U est élément de A, alors il existe un et un seul B tel que B={O tel que R(O)}.

On en déduit la proposition para-mathématique :

Si $C_1,\ldots,C_p$ sont des concepts particuliers pré-définis et R une relation non-flue d'ordre de multiplicité p+1 telle que il existe un ensemble $A(C_1,..,C_p)$ tel que pour tout U tel que $R(C_1,..,C_p,U)$, U est élément de $A(C_1,..,C_p)$ alors il existe un et un seul $B(C_1,..,C_p)$ tel que $B(C_1,..,C_p)$={O tel que $R(C_1,.,C_p,O)$}.

Pour montrer la proposition précédente, $C_1,..,C_p$ représentant simultanément $C_{10},.,C_{p0}$ on considère la relation non-floue $R_1(C_{10},.,C_{p0})$ définie par, pour tout V objet mathématique, $R_1(C_{10},..,C_{p0})(V)$ est équivalent à $R(C_{10},..,C_{p0},V)$. Puis on applique l'Axiome 2.37B.

L'Axiome sur l'ensemble dont les éléments correspondent à une définition récursive D_R sera exprimé de la façon suivante:

DEFINITION 2.37C :

Par définition, « D_R est une *définition récursive Platoniste* » est équivalent à « D_R est une séquence finie mixte à 3 termes et si $(P,R_{DR}, R_{PR})_m$ est tel que $D_R=(P,R_{DR}, R_{PR})_m$:
-P objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, (appelé *premier terme* de D_R).
-R_{PR}, appelée *propriété récursive* de D_R, est une relation non-floue, R_{RC} appelée *clause de récursion* de $D_{R,}$ est une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2.
(i)$R_{PR}(P)$ est vraie.
(ii)Pour tout O tel que $R_{PR}(O)$ est vraie, alors il existe un et un seul objet mathématique $s_{DRP}(O)$ tel que $R_{RC}(s_{DRP}(O),O)$ est vraie.
(iii)$R_{PR}(s_{DRP}(O))$ est vraie. »

AXIOME (DE RECURSION) 2.37 D :

a)Pour toute définition récursive $D_R=(P,R_{DR}, R_{PR})_m$, il existe une et une seule relation non-floue « *est un terme* de D_R » telle que :
« T_n est un terme de D_R » est équivalent à « T_n est identique à P ou il existe T_{n-1} tel que T_{n-1} est un terme de D_R et $T_n=s_{DRP}(T_{n-1})$ ».
On en déduit qu'on peut définir la relation non-floue « *est le successeur dans* D_R de » définie par :
« T_n est le successeur dans D_R de T_{n-1} » est équivalent à : « T_{n-1} est un terme de D_R et $s_{DRP}(T_{n-1})=T_n$ »

b)D_R étant une définition récursive Platoniste, alors il existe un et un seul ensemble $A(D_R)$ tel que $A(D_R)$={x tel que x est un terme de D_R}.

REMARQUE 2.37E :

a)Pour définir une définition récursive Platoniste D_R dans un texte vrai sur un code Platoniste C, On devra utiliser les propositions $Q_{i,1},..,Q_{i,4}$ les propositions Platonistes relationnelles :

$Q_{i,1}$: « un terme de D_R » est un concept général non-flou.

$Q_{i,2}$: « P_{0DR} est (un concept général non-flou) premier terme de D_R . »

$Q_{i,3}$: « D_{CRDR} est (une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2) clause de récursion de D_R ».

$Q_{i,4}$: « D_{PRDR} est (une relation non-floue) la propriété récursive de D_R ».

Ces propositions seront suivies de propositions $P_{i+1},..,P_{i+4}$ équivalentes à des propositions stable Platonistes qui pour être vraies devront être en accord avec la définition d'une définition récursive Platoniste.

On rappelle qu'on a établi le 1^{ier} article en utilisant l'Axiome de récursion des *Propositions des ensembles récursifs ordonnés*. Ces Propositions sont fondamentales car elles permettent d'éviter

l'utilisation explicite des définitions récursives Platonistes. De plus elles généralisent l'Axiome de récursion dans le cas où le premier terme, la clause de récursion et la propriété récursive d'une définition récursive sont définies en fonction de concepts particuliers non-flous pré-définis.

De même on peut exprimer l'Axiome de démonstration par récurrence sous la forme :

AXIOME 2.37F :

Si on R est telle que:
(i)Rest une relation non-floue.
(ii)R(1) est vraie.
(iii)Pour tout i tel que i est élément de **N***, (Si R(i) est vraie alors R(i+1) est vraie).

Alors pour tout i dans **N***, R(i) est vraie.

2.38 EXEMPLES DE PROPOSITIONS VRAIES

a)Considérons un texte $T(P_1,..,P_n)$ sur un code Platoniste C. On suppose que T contient juste après la proposition P_i la proposition Platoniste relationnelle $Q_{i,1}$(un C_1) : « « un C_1 » est un concept général non-flou », avec $P_1,..,P_i$ propositions vraies dans T sur C.
On suppose que juste après $Q_{i,1}$ on a la proposition mathématique simple P_{i+1} :
P_{i+1}: « Pour tout O tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, « O est un C_1 » est équivalent à « R_{i+1}(O) » », avec R_{i+1} relation non-floue connue qui n'est pas la relation « impossible ».

Alors on admettra comme évident que P_{i+1} est vraie dans T sur C, et on dira que P_{i+1} est déduction logique relationnelle (évidente) des propositions la précédant dans T. En effet, si les propositions précédant $Q_{i,1}$ sont vraies, il est évident qu'il existe bien un concept général non-flou « un C_1 » défini par $Q_{i,1}$ et P_{i+1}.

On dira que P_{i+1} est une *définition d'un concept général non-flou vraie*, et qu'elle est une *définition complète* de « un C_1 ». On définit de façon analogue une *définition complète de relation non-floue, de premier terme ou de propriété récursive ou de clause de récursion d'une définition récursive*. Si un concept général non-flou ou une relation non-floue sont définis par des Axiomes (Par exemple « un ensemble », « est élément de », l'EMP, l'ensemble vide..) on dira qu'ils ont des *définitions Axiomatiques*.

b) On remarque que la proposition Platoniste relationnelle Q_1 : « « un C_1 »est un concept général non-flou » est équivalent aux propositions (Q_2,P_2), avec Q_2 : « « est un C_1 » est une relation non-floue » et P_2 ; « Il existe O tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et O est un C_1 ».

Dans certains cas, on utilise des propositions mathématiques simples vraies qui ne sont pas des déductions logique relationnelles des propositions vraies dans H(C) ou dans le texte T sur un code C qui les contiennent et sont appelées *Axiomes* . Ces Axiomes définissent partiellement ou complètent les définitions des concepts généraux non-flous ou des relations non-floues définis Axiomatiquement.

c)On verra que l'Axiome du choix sera appelé « Axiome » alors qu'il peut être considéré comme une déduction logique relationnelle, obtenue par des déductions logiques relationnelles intuitivement évidentes, de la TMP. Plus généralement, on pourra par convention appeler *Axiome* une proposition obtenue par des déductions logiques relationnelles intuitivement évidentes, mais celles-ci n'étant pas des *déductions formelles*, celles-ci étant définies comme suit :

Considérons un texte vrai $T(P_1,..,P_i)$ sur un code Platoniste C. La signification formelle de $P_1,..,P_i$ ainsi que celle des propositions de H(C) (notamment les propositions para-mathématiques) aura comme conséquence que certaines propositions notées P_{i+1} seront entraînées par H(C) et $(P_1,..,P_i)$, c'est à dire que P_{i+1} est déduction logique relationnelle de $(P_1,..,P_i)$. On dira alors que P_{i+1} est une *déduction formelle* de $(P_1,..,P_i)$.

De plus dans H(C), certaines propositions, appelées *règles de déduction formelle* définiront des *déductions formelles élémentaires*. Par définition, une *déduction formelle* sera une déduction formelle élémentaire ou une déduction logique relationnelle obtenue par une séquence finie de déductions formelles élémentaires.

Par convention chaque proposition d'une démonstration (sur un texte T dans un code Platoniste C) sera obtenue par une déduction formelle évidente.

Par exemple, si on a un texte vrai $T(P_1,..,Q_{i,1})$ sur un code Platoniste C avec $Q_{i,1}$: « « Un C_1 » est un concept général non-flou »), alors si P_{i+1} est une définition complète de « un C_1 », d'après les règles de déduction formelle P_{i+1} sera une déduction formelle élémentaire de $(P_1,..,Q_{i,1})$.

Si on a un texte vrai $T(P_1,.,P_i)$ et que P_{i+1} est une proposition ayant comme signification Platoniste dans (T,P_{i+1}) une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition, alors d'après les règles de déduction formelle P_{i+1} sera déduction formelle élémentaire de T.

Les règles de déduction formelles seront donc déterminées par la signification formelle des Axiomes, définitions, théorèmes, propositions para-mathématiques qu'on a admis ou établis. On pourra obtenir cependant des déductions formelles sans utiliser explicitement des règles de déduction formelle, mais en utilisant seulement la signification formelle des propositions du texte T et des hypothèses H(C) du code Platoniste considérés. Cependant, même dans ce cas on utilisera implicitement des règles de déduction formelle.

d)La quasi-totalité des théories mathématiques classiques pourront être identifiées avec des théories mathématiques Platonistes n'utilisant comme Axiomes que ceux appartenant aux hypothèse H(C) de tout code Platoniste c'est-à-dire ceux des fondements de la TMP.

3.CONSISTANCE,COMPLETUDE ET PARADOXES

A)CONSISTANCE

On sait que toute théorie classique mathématique utilise des Axiome évidents. On peut modéliser mathématiquement une telle théorie dans la TLP par les définitions suivantes :

DEFINITION 3.1 :

a)$C(S,R_C)$ étant un code Platoniste, on appelle *théorie mathématique Platoniste sur* C un couple (C,T_{AX}), où T_{AX} est un texte vrai sur C, et tel que si T_{AX} est le texte $(P_1,..,P_n)$, alors toute proposition mathématique simple P_i de ce texte n'utilise aucun concept particulier non-flou pré-défini dans $P_1,\dots,P_{i-1}$.

b)Une Théorie mathématique Platoniste pourra contenir des propositions Platonistes relationnelles, des Axiomes, des définitions complètes de concepts géneraux non-flous ou de relations non-floues et des *Théorèmes*. Un *Théorème* sera une proposition mathématique simple qui n'est pas un Axiome ni une définition complète de concept génénal non-flou ou de relation non-floue mais qui s'obtient par une démonstration sur le texte constitué des propositions le précédant dans T_{AX}. (On généralise immédiatement la définition précédente en remplaçant P_i par une séquence finie de propositions mathématiques simples $P_{i,1},..,P_{ik(i)}$).

DEFINITION 3.2 :

(C,T_{AX}) étant une théorie mathématique Platoniste, on appelle *démonstration sur* (C,T_{AX}) (ou sur T_{AX} dans C) tout texte $(P_1,\dots,P_n)$ telle que pour i dans $\{1,..,n\}$, P_i soit déduction logique relationnelle de $H(C),T_{AX},P_1,\dots,P_{i-1}$. (Définition 2.28. Ceci entraine que $(T_{AX},(P_1,..,P_n))$ est un texte vrai sur C).

(Cette définition est analogue à la définition 2.30. Cependant par convention, on emploiera le terme « démonstration », seulement si $P_1,..,P_n$ sont des déductions formelles évidentes).

DEFINITION 3.3 :

On dira qu'une proposition Platoniste Q_0 *appartient à une théorie mathématique Platoniste* (C,T_{AX}) si :

(i) Q_0 est stable dans (T_{AX},Q_0)

(ii) Il existe une démonstration $(P_1,..,P_n)$ sur (C,T_{AX}) telle que $Pl_C(Q_0)$ soit équivalente à $Pl_C(P_n)$

Une conséquence immédiate des définitions précédentes est le Lemme suivant de consistance :

LEMME 3.4 : (de consistance) :

a)Pour toute démonstration $(P_1,..,P_n)$ sur une théorie (C,T_{AX}), et pour tout i dans $\{1,..,n\}$, on a $Pl_C(P_i)$ est vraie.(Dans $(T_{AX},\dots,P_n)$).

b)Toute proposition Q_0 appartenant à une théorie mathématique Platoniste est vraie.

c)Toute théorie mathématique Platoniste (C,T_{AX}) *est consistante*, c'est-à-dire qu'il est impossible qu'une proposition Q_0 et sa négation Non(Q_0) appartiennent à la théorie (C,T_{AX}).

Preuve :
a) et b) sont la conséquence de la définition d'une déduction logique relationnelle.
Avec les hypothèses du c), on a d'après b) que Q_0 est vraie et n'est pas vraie ce qui est impossible d'après le Lemme de non-contradiction (Lemme 2.25).

REMARQUE-DEFINITION 3.5 :

On devra distinguer les théories mathématiques Platonistes définies précédemment de LA Théorie Mathématique Platoniste (TMP), qu'on écrira toujours avec des majuscules et précédée de l'article défini « La » et qu'on appelera aussi *Théorie Mahématique Platoniste Primitive*. La TMP sera cependant dans les hypothèses H(C) du code Platoniste C de toute théorie mathématique Platoniste sur C. H(C) pourra cependant inclure des théories mathématiques Platonistes définies en 3.1.

B)COMPLETUDE

Pour étudier la complétude d'une théorie (C,T_{AX}), on doit modéliser mathématiquement les déductions logiques relationnelles utilisées dans les théories mathématique classiques.

DEFINITION 3.6 :

On appelle *théorie mathématique Platoniste déductive* un triplet (C,T_{AX},R_D), où (C,T_{AX}) est une théorie Platoniste et R_D est une relation, qui peut exister entre une proposition P_n et un texte $(T_{AX},P_1,..,P_{n-1})$, P_n étant toujours une déduction logique relationnelle de $(P_1,..,P_{n-1})$. On dira alors que P_n est déduction logique relationnelle de $(P_1,..,P_{n-1})$ dans la théorie Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D).

On peut modéliser les théories classiques par des *théorie mathématique Platoniste déductive* , où R_D est telle que une déduction logique P_n de $(P_1,..,P_{n-1})$ dans (C,T_{AX},R_D) est toute déduction logique relationnelle « évidente » (par le mathématicien) de $(P_1,..P_{n-1})$. C'est-à-dire que le mathématicien est modélisé par un *système déductif*. Ce *système déductif* peut obtenir des déductions logiques relationnelles d'un texte $T(P_1,.,P_{n-1})$, mais seulement certaines d'entre elles, en particulier toutes celles modélisées dans les systèmes formels. Si P_n est l'une d'entre elle, d'après la définition précédente on aura : $R_D(P_n,T(P_1,..,P_{n-1}))$ est vraie.

R_D sera défini par des *règles de déduction formelle*, définies dans la section 3.8. On rappelle que celles-ci permettent de définir des *déductions formelles élémentaires* et des *déductions formelles*.

Par exemple si on a un texte vrai $T(P_1,..,P_i)$ sur un code C, avec pour un j dans $\{1,..,i-1\}$ P_j est la définition complète d' « un C_1 », c'est à dire :
P_j :« Pour tout O tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, « O est un C_1 » est équivalent à « R(O) » », alors si P_i a comme signification Platoniste la proposition élémentaire Platoniste de type définition vraie P_{eli} :Def(A)R_i(A), avec R_i(A) : « A est un C_1 », alors la proposition P_{i+1} ayant comme signification Platoniste P_{eli+1} :R(A) sera une déduction formelle élémentaire $T(P_1,.,P_i)$ (D'après les règles de déduction formelle de H(C).).

Si on a un texte vrai $T(P_1,..,P_i)$ sur un code C, avec pour un j dans $\{1,..,i-1\}$ P_j est un Théorème dont la signification Platoniste est de la forme (P_{elTj1},P_{elTj2}), avec P_{elTj1} :Def$(O_1,..,O_p)$,$R_1(O_1,..,O_p)$ et P_{elTj2} :$R_2(O_1,.,O_p)$, alors si P_i a comme signification Platoniste la proposition élémentaire Platoniste vraie P_{eli} :$R_1(P_1,.,P_p)$, P_{i+1} ayant comme signification Platoniste P_{eli+1} :$R_2(P_1,..,P_p)$ sera une déduction formelle élémentaire de T.(D'après les règles de définition formelle de H(C)).

Si P_i a comme signification Platoniste P_{eli} :Non($R_2(P_1,.,P_p)$), P_{i+1} ayant comme signification Platoniste P_{eli+1} :Non($R_1(P_1,..,P_p)$) sera une déduction formelle élémentaire de T.

Si on a un texte vrai $T(P_1,..,P_i)$ sur un code C, avec $O_1,..,O_n$ concepts particuliers non-flous définis dans $(P_1,..,P_{i-2})$ et $Pl_C(P_{i-1})$: Def$(A_1,..,A_p)$, $R_2(A_1,..,A_p,O_1,..,O_n)$ et $Pl_C(P_i)$: $R_3(A_1,..,A_p,O_1,..,O_n)$ alors la proposition P_{i+1} : « Il existe $B_1,..,B_p$ tels que $R_3(B_1,..,B_p,O_1,..,O_n)$ » sera déduction formelle élémentaire de T.(Avec $Pl_C(P_{i+1})$: Def$(B_1,..,B_p)$, $R_3(B_1,..,B_p,O_1,..,O_n)$).

On suppose qu' on a un texte vrai $T(P_1,..,P_i)$ sur un code C, H(C) (ou $(P_1,..,P_{i-2})$) contenant un Théorème du type P_T : « Si y est tel que $P_{auxT1}(y)$, alors «$P_{auxT2}(y)$ est équivalent à $P_{auxT3}(y)$ » », avec $Pl_C(P_T)$:(P_{elT1}, « P_{elT2} est équivalent à P_{elT3} ») avec P_{elT1} :Def(y),$R_{T1}(y)$, P_{elT2} :$R_{T2}(y)$, P_{elT3} :$R_{T3}(y)$.

Alors si $Pl_C(P_{i-1})$:$R_{T1}(z)$ et $Pl_C(P_i)$:$R_{T2}(z)$, P_{i+1}, avec $Pl_C(P_{i+1})$:$R_{T3}(z)$ sera déduction formelle élémentaire de $(P_1,..,P_i)$. Si on a $Pl_C(P_{i-1})$:$R_{T1}(z)$ et $Pl_C(P_i)$:Non($R_{T2}(z)$), P_{i+1}, avec $Pl_C(P_{i+1})$:Non($R_{T3}(z)$) sera déduction formelle élémentaire de T. On pourra aussi intervertir dans ce qui précède « $R_{T2}(z)$ » et « $R_{T3}(z)$ ».

On peut définir de nombreuses déductions formelles élémentaires en généralisant les exemples précédents.

DEFINITION 3.7 :

On définit une *démonstration* sur une théorie mathématique Platoniste déductive, et qu'une proposition Platoniste *appartient* à une théorie mathématique Platoniste déductive de la même façon que pour une théorie mathématique Platoniste, en remplaçant « déduction logique relationnelle » par « déduction logique relationnelle dans la théorie mathématique Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D) ».

On obtient alors pour une théorie déductive un *Lemme de consistance* totalement analogue au Lemme de consistance obtenu pour une théorie Platoniste.

On peut alors définir la complétude d'une théorie mathématique Platoniste déductive de la façon suivante :

DEFINITION 3.8 :

(C,T_{AX},R_D) étant une théorie mathématique Platoniste déductive, on dira qu'une proposition Platoniste Q_0 est *stable* dans (C,T_{AX},R_D) si Q_0 est stable dans (T_{AX},Q_0)

DEFINITION 3.9 :

(C,T_{AX},R_D) étant une théorie Platoniste déductive, on dira qu'elle *est complète* si pour toute proposition stable Q_0 dans (C,T_{AX},R_D), ou bien Q_0 appartient à (C,T_{AX},R_D) ou bien Non(Q_0) appartient à (C,T_{AX},R_D).

A priori, il n'y a pas de raison qu'une théorie Platoniste déductive soit complète, puisque seules certaines déductions logiques relationnelles peuvent être utilisées pour obtenir des propositions vraies appartenant à la théorie. Nous allons cependant dans la section suivante voir si le Théorème d'incomplétude de Godel obtenu pour les systèmes formels peut s'appliquer aux théories déductives Platonistes.

C)PARADOXES

Il est donc intéressant d'examiner si le théorème de Godel peut se généraliser aux théories mathématiques Platonistes déductives.
(C,T_{AX},R_D) étant une théorie Platoniste déductive identifiée à une théorie classique, R_D ne permettant que les déductions logiques relationnelles évidentes, on considère la proposition :
P : « P n'est pas démontrable dans (C,T_{AX},R_D) ».

Si on veut obtenir que P est vrai, procédant classiquement comme dans le Théorème de Godel, on suppose que P est fausse, alors P est démontrable, ce qui contredit P et est donc impossible, et donc P est vraie.

Cependant, cette démonstration est inacceptable pour justifier que P est vraie, car elle est une démonstration dans (C,T_{AX},R_D), n'utilisant que des déductions logiques évidentes, et donc si on l'accepte comme démonstration de P, P est contredite.
Donc P ne peut être fausse ni vraie.

Or ceci s'explique dans la TLP par le fait que P est instable : Il n'y a pas de propositions Platonistes stables qui soient signification Platoniste de P et P n'est même pas une proposition mathématique simple. Et donc le fait qu'on ne puisse démontrer P ne prouve pas l'incomplétude de (C,T_{AX},R_D).

Il en est de même pour la proposition P : « P est vraie », le fait qu'elle ne soit ni vraie ni fausse se justifie si elle est instable.

On voit donc que le Théorème de Godel ne se généralise pas pour prouver l'incomplétude des théories mathématiques Platonistes déductives.

On a d'autres justifications possibles: En effet, à priori on n'a jamais supposé que (C,T_{AX},R_D) est un concept particulier ou général non-flou. Comme on l'a dit, c'est un concept paramathématique permettant d'étudier les objets de l'EMP. De plus, on ne peut pas définir dans la TMP une proposition P en utilisant P, comme la proposition de Godel. On retrouve donc que P est instable, et donc on n'a pas prouvé l'incomplétude de (C,T_{AX},R_D), telle qu'on l'a défini dans la définition 3.9.

Cependant, on peut penser que la théorie des nombres classiques peut être identifiée à une théorie mathématique Platoniste déductive incomplète. En effet, il est possible que certaines propriétés ne puissent pas se démontrer un nombre fini de déductions logiques relationnelles évidentes, et alors elles ne sont pas démontrables dans la théorie mathématque Platoniste correspondant à la théorie des nombres classiques. C'est vraisemblablement le cas pour la Conjecture de Goldbach (qui est équivalente à une proposition Platoniste stable si on admet la théorie mathématique Platoniste correspondant à la théorie des nombres classique) , pour laquelle on a défini dans la Théorie Aléatoire des Nombres de nouveaux outils mathématiques n'existant pas dans les théories mathématiques actuelles, et permettant de donner une justification théorique à cette conjecture.

On peut utilisant des propositions Platonistes définir un système formel classique, et donc montrer qu'un système formel peut être identifié à un concept non-flou de la TLP. Dans certains cas on peut identifier un système formel avec une théorie Platonique déductive, et alors on peut lui

appliquer le Lemme de consistance. Ainsi pour justifier théoriquement la consistance d'un système formel, il suffit de montrer qu'on peut l'identifier à une théorie Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D), C étant un code Platoniste (S,R_C).

4.EXEMPLES

Nous allons expliciter dans cette partie les relations existant entre des objets mathématiques équivalentes à des théorèmes célèbres.

PREAMBULE :

(i)On a vu qu'une proposition mathématique simple pouvait utiliser des expressions de type $F(O_1,..,O_n)$, F étant une fonction-concept. On a vu dans la définition 2.23, que $F(O_1,..,O_n)$ était implicitement défini par une proposition élmentaire Platoniste. Celle-ci est du type , $O_1,..,O_r$ symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires et $O_{r+1},.,O_n$ concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet :
$D_{elC}(F(O_1,..,O_n))$: $Def(F(O_1,..,O_n)),R(F(O_1,..,O_n), O_1,..,O_n)$: « $(O_1,..,O_n)$ appartient à $Dep(F)$ et $(F(O_1,..,O_n),(O_1,..,O_r))$ appartient à F ».

On utilisera donc le symbole $D_{elC}(F(O_1,..,O_n))$ pour représenter la proposition élémentaire Platoniste de type définition précédente.

Cependant si $O_1,..,O_n$ sont des concepts généraux non-flous pouvant chacun représenter un seul objet, et $F(O_1,..,O_n)$ peut représenter un objet mathématique, alors on identifiera $F(O_1,..,O_n)$ avec un concept général non-flou.

(ii)Considérons une proposition élémentaire Platoniste de type relation P_{elR} :$R(O_1,..,O_n)$ ou une proposition élémentaire Platoniste de type définirion P_{elD} :$Def(O_1,.,O_r)R(O_1,.,O_n)$ appartenant à la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple P.

Ou bien $R(O_1,.,O_n)$ sera équivalent à une proposition Platoniste auxiliaire $P_{aux}(O_1,.,O_n)$ appartenant à $Pl_C(P)$, ou bien R sera défini implicitement par une proposition notée impl(R) du type « R est un relation non-floue d'ordre de multiplicité n_G et pour tous $O_{10},..,O_{nG0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, $R(O_{10},.,O_{nG0})$ est équivalent à $Exp(O_{10},.,O_{nG0},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k,$ $F_1,..,F_t)$ (L'expression précédente pourra ne pas contenir de C_j ou(et) de F_j), avec $C_1,.,C_p$ concepts généraux non-flous pouvant représenter chacun un unique objet et $Exp(O_{10},.,O_{n0G},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k,$ $F_1,..,F_t)$ est une expression utilisant $O_{10},.,C_p$, des relations non-floues pré-définies $R_1,..,R_k$ (R_i pouvant être de la forme « est un C_i »), des concepts relationnels primitifs parmi « et », « ou », « Non », « est équivalent à « , « si..alors », des fonction-concepts $F_1,..,F_t$, certaines pouvant être des combinaisons de fonction-concepts définies implicitement telles que définies en 2.23 ou la fonction-concept impossible F_{IMP} et les symbole de ponctuation parmi « parenthèse », « virgule » et « guillemets ». On dira que impl(R) est la *définition implicite* de R et celle-ci n'appartiendra pas à $Pl_C(P)$,d'où son qualificatif « implicite ».

Par définition, si $Exp(O_{10},.,O_{n0G},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k, F_1,..,F_t)$ contient une expression de type $F_i(O'_{10},.,O'_{r0})$ ou $F_{IMP}(O'_{10},.,O'_{r0})$ ne pouvant représenter aucun objet, alors $Exp(O_{10},.,O_{n0G},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k, F_1,..,F_t)$ ne sera pas vraie.

Utilisant des concepts généraux non-flous flottants ou paramétrés, on pourra obtenir de la même façon $impl(R_{n1G,..,npG})$, $R_{n1G,..,npG}$ étant une relation non-floue flottante.

(iii)On rappelle qu' on peut avoir dans une proposition mathématique simple une expression du type $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, $O_1,.,O_n$ symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires (et donc non obtenus par des combinaisons de fonction-concepts) et $C_1,.,C_p$ concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet, avec :

-$E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ ne contient aucune relation non-floue ni concept primitif relationnel ni symboles de ponctuation excepté des symboles « parenthèses » ou « virgule » ou « accolades » ni symboles « blanc » ni symbole « point » celui-ci étant le dernier symbole de l'expression.

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ est immédiatement précédé d'un symbole « blanc » ou d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un « guillemet ouvert » et est immédiatement suivi

d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un symbole parmi « blanc » ou « point » ou « guillemet fermé » ou « virgule », celle-ci étant suivi d'un symbole « blanc ».

On a vu dans la définition 2.23 qu'on pourra alors en général définir une fonction-concept F_{COMB} telle que $F_{COMB}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ a la même signification que $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$. $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ sera défini implicitement par une proposition Platoniste notée $impl(E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p))$, constituée de propositions élémentaires Platonistes de type définition P_{elDi} :$D_{elC}(F(O'_{i1},..,O'_{it(i)}))$ (voir (i)). Cependant, pour j parmi 1,.,t(i), O'_{ij} pourra lui-même être de la forme $F_{k(j)}(O'_{k(j)1},..,O'_{k(j)t(k(j))})$ en étant défini par une proposition $P_{elDk(j)}$ précédant P_{elDi}. On obtiendra $impl(E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p))$ d'après les règles syntaxiques de convention (symbolique) du code Platoniste C, de même que F_{COMB}. F_{COMB} pourra être utilisée dans la définition implicite d'une relation telle qu'on l'a définie au point précédent (ii). On a donné le type des propositions élémentaires Platonistes définissant F_{COMB} dans la section 2.23a). On rappelle que pour définir F_{COMB}, on pourra utiliser la fonction-concept F_{Ids} de concept de départ « une séquence finie » et telle que si s est une séquence finiet $F_{Ids}(s)=s$.

On rappelle (voir section 2.23) que $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, lorsqu'il ne sera pas identifié à une expression du type $F_{COMB}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ sera identifié avec un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet et sera alors identifié avec $F_{IMP}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, F_{IMP} fonction-concept impossible.

Une proposition ayant la même signification qu'une proposition mathématique simple dans un code Platoniste C pourra utiliser un symbole S ayant la même signification dans le code C qu'un symbole $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ tel que défini précédemment, ou que $F(O_1,..,O_n)$, F étant une fonction-concept pré-définie, d'après les règles syntaxiques de convention (symbolique) du code Platoniste C.

(iv)$O_1,.,O_n$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, on pourra aussi utiliser des expressions du type $(O_1,..,O_n)$ (n concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel supérieur ou égal à 2). De même cela signifiera qu'on définit implicitement $(O_1,.,O_n)$ par la proposition élementaire Platoniste de type définition que l'on notera $D_{elS}((O_1,..,O_n))$. (Avec $D_{elS}((O_1,..,O_n))$:$Def((O_1,..,O_n)),R((O_1,..,O_n),O_1,..,O_n)$:
« $(O_1,..,O_n)$ est une séquence finie à n termes et O_1 est le premier terme de $(O_1,..,O_n)$ et..et O_n est le nième terme de $(O_1 ,..,O_n)$ ».

(v)On rappelle aussi qu'on pourra identifier $\{O_1,.,O_n\}$ avec $F_E(O_1,..,O_n)$, F_E étant une fonction-concept. On pourra aussi identifier un ensemble contenant un unique élément x noté $\{x\}$ avec $F_E(x,x)$. On rappelle aussi que f étant une fonction, on identife f(x) avec im(f,x), im étant une fonction-concept.

(vi)On remarque cependant que si on a une proposition élémentaire Platoniste de type définition P_{elD1} :$Def(B)R_1(B,O_1,..,O_r)$ qui n'est pas générale (Avec donc au moins un O_i), on pourra considérer la proposition élémentaire Platoniste de type relation P_{elR1} :$R_{12}(O_1,..,O_r)$, avec R_{12} est une relation non-floue d'ordre de multiplicité r telle que pour tous $O_{10},..,O_{r0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP « $R_{12}(O_{10},..,O_{r0})$ est équivalent à $Def(B),R_1(B, O_{10},..,O_{r0})$ ».

On rappelle que par définition « $Cond(R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)}), R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)}))$ » aura la même signification que « Si $R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)})$ alors $R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)})$ » et « $Eq(R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)}), R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)}))$ » aura la même signification que « $R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)})$ est équivalent à $R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)})$ ».

On rappelle que P_{eli1} et P_{eli2} étant des propositions élémentaires Platonistes de type relation, on pourra en utilisant P_{eli1} et P_{eli2} et des concepts primitifs relationnels parmi « ou », « et », « si..alors », « est équivalent à », « Non » définir des propositions élémentaires Platonistes composées qu'on pourra identifier avec des propositions élémentaires Platonistes de type relation.

(vii)Dans les exemples suivants, les définitions implicites des relations utilisées dans les propositions élémentaires Platonistes de même que celles des combinaisons de fonction-concepts s'obtiennent de façon évidente. On donnera cependant des exemples de définition implicite de symboles de type $E(O_1,.,O_n,C_1,..,C_p)$ définis en (iii) (ou ayant la même signification).

(viii)On a vu dans le 1[ier] article qu'une proposition mathématique simple P_i pouvait contenir une expression du type P_{Ai} « A est tel que A={x tel que $Q_{auxiA}(x,O_1,..,O_n)$} », $O_1,.,O_n$ symboles particuliers non-flous pré-définis.

On ne pourra pas identifier l'expression {x tel que $Q_{auxiA}(O_1,..,O_n)$} avec un symbole $E(O_1,.,O_n)$ tel qu'on l'a définie en (iii) puisqu'elle contient le concept relationnel primitif « tel que ». Cependant, P_{Ai} aura comme signification Platoniste la proposition élémentaire Platoniste de type définition (P_{eliA}) avec P_{eliA} :Def(A)$R_{iA}(A,O_1,..,O_n)$, et $R_{iA}(A,O_1,..,O_n)$ a la signification d'une proposition stable Platoniste auxiliaire $P_{RiAaux}(A,O_1,..,O_n)$ contenue dans $P_{lC}(P_i)$.

Si on a la relation non-floue R_Q d'ordre de multiplicité n telle que pour pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP x_0, $O_{10},.,O_{n0}$, « $R_Q(x_0,O_{10},.,O_{n0})$ est équivalent à $Q_{auxiA}(x_0,O_{10},.,O_{n0})$ », alors $P_{RiAaux}(A,O_1,..,O_n)$ sera la séquence (P_{elR1}, P_{elR2}, P_{elR3}) avec P_{elR1} : $R_1(A)$: « A est un ensemble, P_{elR2} :Def(x)$R_2(x)$: et $R_2(x)$:« x est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP », P_{elR3} : « $R_3(x,A)$ est équivalent à $R_Q(x,O_1,.,O_n)$ » , avec $R_3(x,A)$: « x est élément de A ».

EXEMPLE 4.1 :

Dans cette section nous allons donner l'interprétation Platoniste de certains Théorèmes célèbres, dont la formulation a exactement la même signification qu'une proposition mathématique simple.

Soit par exemple le Théorème de Bezout :

Si (p,q) est un élément de $\mathbf{N_Z}^2$ (On rappelle $\mathbf{N_Z}=\mathbf{Z}^+=\mathbf{N}\times\{1\}$), alors « p est premier avec q est équivalent à Il existe (u,v) tel que « (u,v) est élément de $\mathbf{Z}^2$ et $pu+_{\mathbf{Z}}qv=1_{\mathbf{Z}}$ » » (On rappelle $1_{\mathbf{Z}}=(1,1)$) ».

Le théorème précédent aura comme proposition auxiliaire principale une proposition du type $P_{aux}(p,q)$. La proposition auxiliaire « Il existe (u,v) tel que « (u,v) est élément de $\mathbf{Z}^2$ et $pu+_{\mathbf{Z}}qv=1_{\mathbf{Z}}$ » » n'est pas une proposition auxiliaire principale car elle n'est pas vraie considérant la définition de(p,q).

On suppose qu'on a défini la relation non-floue pouvant exister entre 2 naturels « est premier avec ». Le Théorème précédent a alors comme signification Platoniste les 2 propositions élémentaires Platonistes suivantes (P1,P2):

P1:Def1(p,q),R1(p,q) :p est élément de $\mathbf{N_Z}$ et q est élément de $\mathbf{N_Z}$.

P2 :Eq(H(p,q),C(p,q)) (Signification Platoniste de la Proposition auxiliaire principale).

Avec H(p,q) et C(p,q) sont les propositions élémentaires stables Platonistes de type relation suivantes :

H(p,q) : R2(p,q):« p est premier avec q ».
C(p,q) : R3(p,q) :Def(u,v), R4(u,v,p,q), R4(u,v,p,q) ayant la signification de la proposition Platoniste auxiliaire suivante $P_{aux}(u,v,p,q)(P_{aux1},P_{aux5})$:

P_{aux1} : $R_{aux1}(u,v)$: (u,v) est élément de $\mathbf{Z}^2$.

On donne alors la définition implicite du symbole « $up+_{\mathbf{Z}}qv$ », obtenue d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C.
(implicitement)P_{aux2} : $D_{elC}(im(\times_{\mathbf{Z}}, (u,p))$ (noté « up » d'après les règles syntaxiques de convention de C) (Voir préambule. On rappelle que (u,v) est implicitement défini par une proposition élémentaire Platoniste de type définition $D_{elS}((u,v))$. On a défini dans le préambule les expressions « D_{elC}» et « D_{elS}»).
(implicitement)P_{aux3} :$D_{elC}(im(\times_{\mathbf{Z}},(q,v))$ (noté « qv »)
(implicitement)P_{aux4} :$D_{elC}(im(,+_{\mathbf{Z}},(up,qv)))$ (noté « $up+_{\mathbf{Z}}qv$»).

P_{aux5} :R_{aux5}(p,q,u,v): up$+_{\mathbf{Z}}$qv=$1_{\mathbf{Z}}$.

(Dans P_{aux2},P_{aux3},P_{aux4} on a explicité les définitions implicites permettant de définir le symbole particulier up$+_{\mathbf{Z}}$qv qui a la même signification qu'un symbole de type E_4(p,q,u,v,$+_{\mathbf{Z}}$,$\times_{\mathbf{Z}}$), obtenu par une combinaison de fonction-concepts). R_{aux5} utilise implicitement la fonction-concept F_{COMB4} telle que F_{COMB4}(p,q,u,v,$+_{\mathbf{Z}}$,$\times_{\mathbf{Z}}$) a la même signification que le symbole E_4(p,q,u,v,$+_{\mathbf{Z}}$,$\times_{\mathbf{Z}}$) identifié avec le symbole particulier noté up$+_{\mathbf{Z}}$qv. On rappelle que p_0,q_0,u_0,v_0,$+_{\mathbf{Z0}}$,$\times_{\mathbf{Z0}}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP quelconques, les propositions élémentaires Platonistes définissant implicitement F_{COMB4}(p_0,q_0,u_0,v_0,$+_{\mathbf{Z0}}$,$\times_{\mathbf{Z0}}$) sont totalement analogues aux propositions élémentaires Platonistes P_{aux2},P_{aux3},$P_{aux\ 4}$).

EXEMPLE 4.2 :

Considérons le théorème permettant d'obtenir les solutions d'une équation réelle du second degré. :

Si (a,b,c) est tel que « (a,b,c) est élément de $\mathbf{R}^3$ et a $\neq 0_{\mathbf{R}}$, F est tel que « F est élément de F($\mathbf{R}$,$\mathbf{R}$) et pour tout x tel que x est élément de $\mathbf{R}$, F(x)=a$x^2+_{\mathbf{R}}$bx$+_{\mathbf{R}}$c » , S est tel que S={y tel que F(y)=0} et Δ est tel que Δ=$b^2-_{\mathbf{R}}$4ac » alors « « si Δ$<_{\mathbf{R}}0_{\mathbf{R}}$, alors S=Ø », « si Δ=$0_{\mathbf{R}}$, alors S={$-_{\mathbf{Ro}}b/_{\mathbf{R}}$2a} » et « si Δ$>_{\mathbf{R}}0_{\mathbf{R}}$, alors « si (r_1 ,r_2) est tel que « r_1=($-_{\mathbf{Ro}}$b$+_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R+}}$Δ)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a et r_2=($-_{\mathbf{Ro}}b-_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R+}}$Δ)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a » alors S = {$r_1$,$r_2$}» » ».

Le Théorème précédent aura comme propositions auxiliaires principales des propositions, de type P_{aux1}(Δ,S,$0_{\mathbf{R}}$,Ø), P_{aux2}(Δ,S,b,a,$0_{\mathbf{R}}$,$/_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{Ro}}$, $2_{\mathbf{R}}$,$\times_{\mathbf{R}}$) ($\times_{\mathbf{R}}$ est implicitement utilisé) et P_{aux3}(Δ,S,a,b,$0_{\mathbf{R}}$).

La proposition auxiliaire « si (r_1 ,r_2) est tel que « r_1=($-_{\mathbf{Ro}}$b$+_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R+}}$Δ)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a et r_2=($-_{\mathbf{Ro}}b-_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R+}}$Δ)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a » alors S = {$r_1$,$r_2$}» n'est pas une proposition principale car elle n'est pas vraie considérant les définitions de S,Δ, a,b,c.

On utilise alors comme concepts généraux prédéfinis la multiplication, la division, l'addition et la soustraction dans $\mathbf{R}$, la racine carrée d'un réel positif ($\sqrt{}_{\mathbf{R+}}$)et l'opposition d'un réel ($-_{\mathbf{R0}}$) et $0_{\mathbf{R}}$. On utilise aussi les relations non-floues $>_{\mathbf{R}}$ et $<_{\mathbf{R}}$.On pourra omettre l'indice « $_{\mathbf{R}}$ » à ces fonctions pour plus de simplicité.

Le théorème a alors comme signification Platoniste les propositions élémentaires Platonistes suivantes (P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7):

P1 :Def1(a,b,c)
R1(a,b,c) : « (a,b,c) est élément de $\mathbf{R}^3$, et a est différent de 0 ».

P2 :Def2(F)
R2(F,a,b,c) : « F est élément de F($\mathbf{R}$,$\mathbf{R}$) et pour tout x tel que x est élément de $\mathbf{R}$, F(x)=a$x^2+_{\mathbf{R}}$bx$+_{\mathbf{R}}$c ».

(On trouve aisément une proposition Platoniste auxilaire P_{aux2}(F,a,b,c) ayant la même signification que R2(F,a,b,c), en utilisant la même méthode que dans l'exemple précédant).

P3 :Def3(S)
R3(S,F) : « S={y tel que y est élément de $\mathbf{R}$ et F(y)=0 }».

(On trouve aisément une proposition Platoniste auxilaire P_{aux3}(S,F) ayant la signification de à R3(S,F)).

P4 :Def4(Δ)
R4A(Δ, a,b,c) : « Δ=b^2-4ac »

(On n'a pas écrit les propositions élémentaires Platonistes de type définition de type:D_{elC}(im(f,x)) définissant implicitement b^2-4ac et {-b/2a} Celles-ci s'obtiennent facilement comme dans le premier exemple, obtenues d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C).

P5 : RP5(Δ, S,$0_{\mathbf{R}}$,Ø) :Cond (P5A(Δ, $0_{\mathbf{R}}$),P5B(S,Ø)) (Signification Platoniste de la 1[ière] Proposition auxiliaire principale).
Avec :
P5A(Δ, $0_{\mathbf{R}}$) : R5A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$) : « $\Delta <_{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}$ »

P5B(S,Ø) : « R5B(S,Ø) : « S =Ø ».

P6 :RP6(Δ,S,b,a,$0_{\mathbf{R}}$, $/_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{Ro}}$,$2_{\mathbf{R}}$,$\times_{\mathbf{R}}$) :Cond (P6A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$) ,P6B(S,b,a,$\times_{\mathbf{R}}$,$/_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{Ro}}$,$2_{\mathbf{R}}$)) (Signification Platoniste de la 2[ième] Proposition auxiliaire principale).

Avec:
P6A :R6A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$) : « $\Delta=0_R$ »

P6B:R6B(S,b,a,$\times_{\mathbf{R}}$,$/_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{Ro}}$,$2_{\mathbf{R}}$) :« S={$-_{\mathbf{Ro}}$b$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a} »

P7 : RP7(Δ,S,a,b,$0_{\mathbf{R}}$) :Cond (P7A(Δ, $0_{\mathbf{R}}$),P7B(Δ,S,a,b)). (Signification Platoniste de la 3[ième] Proposition auxiliaire principale).

Avec P7A (Δ, $0_{\mathbf{R}}$): R7A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$): « $\Delta >_{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}$ » .

P7B:R7B(S, a,b, Δ):
R7B(S, a,b, Δ) ayant la signification de la propositions Platoniste auxiliaire:
P7Ba:Def(r_1,r_2)
R7Ba(r_1,r_2,b,a,Δ):« r_1=($-_{\mathbf{Ro}}$b$+_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R}}\Delta$)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a et r_2=($-_{\mathbf{Ro}}b-_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{R}\Delta$) $/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a »
(Pour définir formellement la relation R7Ba(r_1,r_2,b,a,Δ), on utilisera la fonction-concept F_{COMB1} telle que F_{COMB1}(b,a,Δ, $-_{\mathbf{Ro}}$, $+_{\mathbf{R}}$,$\sqrt{}_{\mathbf{R}}$, $/_{\mathbf{R}}$, $2_{\mathbf{R}}$) a la même signification que le symbole "($-_{\mathbf{Ro}}$b$+_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R}}\Delta$)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a)").

On donne alors la définition implicite du symbole "{r_1,r_2}":
(implicitement)P7Bb:D_{elC}({r_1,r_2}) ("D_{elC}" étant défini dans le préambule).

P7Bc:R7Bc(S,r_1,r_2): « S={r_1,r_2} ».

EXEMPLE 4.3

Considérons le Théorème de Cailey-Hamilton :
Si n est élément de **N***, A est élément de Mn(**C**), X_A est tel que « X_A est élément de F(**C**,**C**) et pour tout x tel que x est élément de **C**, X_A(x)=$\det_n$(A$-_{M,n}$ x$\cdot_{M,n}$ $Id_{M,n}$) », alors X_A(A)=$0_{M,n}$.

Le théorème précédent aura comme proposition auxiliaire principale la proposition du type P_{aux}(X_A,A,n).

Dans la proposition précédente, Mn(**C**), Id_{Mn}, 0_{Mn}, $-_{M,n}$, $\det_n$, $\cdot_{M,n}$ sont identifiées à l'image par n de fonctions-concepts distinctes dont le concept de départ peut représenter tout naturel non nul. Ces fonctions-concepts ont leurs significations classiques.

De plus on utilise implicitement la fonction-concept $F_{C(x),M}$, dont le concept de départ peut représenter tous les couples (P_0(x),M_0), avec P_0(x) élément de **C**(x_S) (qu'on identifie avec un concept général pouvant représenter l'ensemble classique des polynomes sur **C**) et M_0 est tel qu'il existe n naturel non nul tel que M_0 est élément de Mn(C).

On notera alors P_0(M_0) $F_{C(x),M}$(P_0,M_0).

Le théorème précédent a alors comme signification Platoniste suivante les propositions élémentaires Platonistes suivantes(P1,P3,P5,P7):

P1 : Def1 (n)
R1(n) : n est un élément de **N*** .

(implicitement)P2:D_{elC}(Mn(**C**)) ("Mn(**C**)" a la même signification que "F_M(n,C)" , F_M fonction-concept pré-définie, d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C).

P3 :Def3(A)
R3(A,n): A est un élément de Mn(**C**).

On a alors les définitions implicites des symboles $Id_{M,n}$, $-_{M,n}$, $\cdot_{M,n}$, det_n,$0_{M,n}$ (Les symboles précédents ont respectivement la même signification que F_1(n), F_2(n),F_3(n), F_4(n), F_5(n), chaque F_i étant une fonction-concept pré-définie) :

(implicitement)P4A: D_{elC}($Id_{M,n}$) ("D_{elC}" étant défini dans le préambule).
(implicitement)P4B :D_{elC}($-_{M,n}$)
(implicitement)P4C :D_{elC}($\cdot_{M,n}$)
(implicitement)P4D :D_{elC}(det_n)
(implicitement)P4E :D_{elC}($0_{M,n}$)

P5 :Def5(X_A)
R5(X_A,A,n)

Avec R5(X_A,A,n) ayant la signification de la proposition Platoniste auxiliaire P_{aux}5(X_A,A, n)(PA,P5B,P5G):

P5A :R5A(X_A, **C**(x_S)) : X_A est élément de **C**(x_S).

P5B :Def5B(x), R5B(x,**C**) : x est élément de **C**.

On donne alors les définitions implicites de $Det_n(A-_{M,n}x\cdot_{M,n}Id_{M,n})$ et de X_A(x), obtenues d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C).

(implicitement)P5C :D_{elC}(im($\cdot_{M,n}$, (x,$Id_{M,n}$))) (noté « $xId_{M,n}$ » d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C)
(implicitement)P5D :D_{elC}(im($-_{M,n}$, (A,x$Id_{M,n}$))) (noté « $A-_{M,n}x\cdot_{M,n}Id_{M,n}$ »)
(implicitement)P5E :D_{elC}(im(det_n, $A-_{M,n}x\cdot_{M,n}Id_{M,n}$)) (noté « $Det_n(A-_{M,n}x\cdot_{M,n}Id_{M,n})$ »)
(implicitement)P5F :D_{elC}(im(X_A,x)) (noté X_A(x))

P5G :R5G(X_A,x,A,n): $X_A(x)=Det_n(A-_{M,n}x\cdot_{M,n}Id_{M,n})$.

La proposition élémentaire Platoniste P5G utilise implicitement la fonction-concept F_{COMB5} telle que F_{COMB5}(A,n,x) a la même signification que $Det_n(A-_{M,n}x\cdot_{M,n}Id_{M,n})$. Les propositions élémentaires Platonistes définissant implicitement F_{COMB5} (A_0,x_0,n_0), pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP A_0,x_0,n_0, sont totalement analogues aux propositions élémentaires Platonistes P5C à P5E.)

On donne alors la définition implicite du symbole « X_A(A) » :
(implicitement)P6 :D_{elC}(X_A(A))

P7 : R7(X_A,A,n) :$X_A(A)=0_{M,n}$. (Signification Platoniste de la Proposition auxiliaire principale).

(On aurait cependant pu écrire le Théorème précédent sous la forme de la proposition "Si n est tel que n est élément de **N*** et A est tel que A est élément de M_n(**C**), alors X_A(A)=0", en identifiant d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste considéré X_A avec F_{PC}(A), F_{PC} étant une fonction-concept.)

EXEMPLE 4.4 :

On démontre facilement l'Axiome du choix dans la TLP :

On rappelle cet Axiome, exprimé sous forme d'une proposition mathématique simple :
Si E est tel que « E est un ensemble non vide et pour tout (A,B) tel que A et B sont des éléments de E, « A est un ensemble non vide et B est un ensemble non vide et $A \cap B = \emptyset$ » », alors il existe G tel que « « G est un ensemble et pour tout C tel que C est élément de E, il existe un et un seul g tel que « g est élément de C et g est élément de G » » et « pour tout h tel que h est élément de G, il existe D tel que « D est élément de E et h est élément de G » » .

Preuve :

Soit E un concept non-flou représentant un unique ensemble non vide dont les éléments sont des ensembles disjoints non vides. On note A le concept particulier non-flou défini par « A est tel que A est élément de E »

D'après l'Axiome d'existence d'ensemble donné dans l'article précédent [1] (Axiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou unique $F=U_E(A)$ dont les éléments sont les éléments des ensembles A appartenant à E. En général les ensembles A sont des sous-ensembles d'un ensemble F, et donc on peut plus simplement utiliser cet ensemble F.

D'après le premier article [1], il existe donc un concept non-flou F(E,F) dont les éléments sont toutes les applications de E dans F.

On a vu dans l'article précédent que si on avait 2 ensembles A et B non vides et a étant le concept particulier défini par « a est tel que a est élément de A », et si on avait une définition non-floue D(o,a,A,B) telle qu'on ait un concept non-flou f(a,A,B) défini par « f(a,A,B) est tel que D(f(a,A,B),a,A,B) », défini uniquement on fonction de a,A,B et tel que f(a,A,B) est élément de B, alors il existait un concept particulier non-flou f défini uniquement en fonction de A,B défini par :
« f est élément de F(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A, f(a) est tel que D(f(a),a,A,B) ».

On peut généraliser le théorème précédent au cas où f(a,A,B) est un concept particulier non-flou mais n'est pas défini uniquement en fonction de a,A,B. Alors on admet axiomatiquement que de façon évidente, f est un concept particulier non-flou, mais n'est pas défini uniquement en fonction de A,B.

Appliquant l'Axiome précédent pour (E,F) à la place de (A,B) et prenant comme définition D(o,A,E,F) : «o est élément de A », on obtient un concept particulier non-flou f, telle que f est élement de F(E,F) et pour tout A tel que A est élément de E, f(A) est élément de A.

On considère alors l'ensemble G(f,E)={x tel que « il existe A tel que « A et élément de E et x est identique à f(A) » »}.

D'après l'Axiome d'existence d'ensemble G(f,E) est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de f,E, et il est évident que tout objet G_0 pouvant être représenté par G(f,E) convient.

5.CONSEQUENCES DE LA TMP EN PHYSIQUE (ET AUTRES SCIENCES)

Toutes les sciences del'Univers ou disciplines utilisant des mathématiques (physique, chimie, biométrie, économie, comptabilité) ont pour principe (implicitement) d'identifier les concepts de la réalité concrète qu'elles étudient avec des concepts généraux de la TMP.

Ainsi par exemple en physique, on peut identifier le concept d'espace-temps avec le concept général non-flou $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3$, et un évènement de l'espace-temps avec le concept général non-flou pouvant représenter tous les éléments de $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3$ du type (t,(x,y,z)).

Alternativement (dans la Théorie de l'Ether) on pourra identifier le concept d'espace-temps avec le concept général non-flou g(t), avec g application de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+\times P(\mathbf{R}^3)$ telle que pour tout t élément de $\mathbf{R}^+$, g(t)=(t,S(t)) avec S(t) est une sphère de centre (0,0,0) et de rayon $R(t)=C\times_{\mathbf{R}}t$, C étant

une constante réelle. Un évènement de l'espace-temps sera le concept général non-flou pouvant représenter tous les objets mathématiques du type (t,(x,y,z)), avec (t,(x,y,z)) est élément de $\{t\}\times S(t)$.

De même on peut modéliser un champ électromagnétique dans le vide et en l'abscence de charge, dans un Référentiel de Lorentz, dans un volume parallèlipédique, de la façon suivante :
V_0 est un volume de forme parallélipédique ouvert (C'est-à-dire privé de ses fontières) sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$. (On rappelle qu'on met l'indice « 0 » pour un symbole identifié à un objet mathématique).
($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) est un concept particulier non-flou pouvant représenter tous les couples ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$) de fonctions infiniment dérivables de de $V_0\times\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^3$ et vérifiant les équations de Maxwell dans le vide et en absence de charge. (Formellement, un élément de $V_0\times\mathbf{R}^+$ est de la forme ((x,y,z),t), mais on l'écrira, dans tout ce qui suit, sous la forme (x,y,z,t)).

Alors on définit « un champ électromagnétique dans le vide et en absence de charge dans un volume parallélipédique d'un Référentiel inertiel » comme le concept général non-flou identifié à ($\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$) sans paramètres fixes.

On définit « une description complète d' un champ électromagnétique dans le vide, dans un volume parallélélipédique d' un Référentiel inertiel et en l'abscence de charge » comme le concept général non-flou pouvant représenter tous les triplets (-le vide-,V_0, -abscence de charges- , ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$)).

On peut généraliser ceci en définissant « un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique dans un volume parallélipédique d'un Réfétentiel de Lorentz » comme un concept général non-flou. Pour cela on procède comme suit :

-V_0 est un volume de forme parallélipédique ouvert sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$.
- ε_{m0} et μ_{m0} sont des fonctions de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^{*+}$, (identifiées à la permittivité et à la perméabilité du milieu), qui sont celles du vide pour (x,y,z) n'est pas élément de V_0.
-ρ_{l0} est une fonction infiniment dérivable de $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{j}_{l0}$ est une fonction infiniment dérivable de $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^3$, reliées entre elles par l'équation de conservation de la charge. (Ces fonctions seront identifiées avec la densité volumique de charge libre et la densité de volume de courrent libre) elles seront nulles si (x,y,z) n'est pas élément de V_0.
-($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) est un concept particulier non-flou pouvant représenter tous les couples ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$) de fonctions infiniment dérivables de de $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^3$ et vérifiant les équations de Maxwell.

Alors on définit « un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique dans un volume parallélipédique d'un Référentiel de Lorentz » comme le concept général non-flou identifié à ($\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$) sans paramètres fixes.

On définit aussi « une description complète d'un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique dans un volume parallélipédique d'un Référentiel d Lorentz » comme le concept général non-flou pouvant représenter toutes les séquences :
(-un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique homogène, linéaire et isotrope dans un Référentiel inertiel-, (ε_{m0}, μ_{m0})), V_0, ρ_{l0}, $\mathbf{j}_{l0}$, ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$)).

On pourra aussi identifier « un milieu diélectrique ou magnétique au concept général non-flou pouvant représenter tous les couples (-un milieu diélectrique ou magnétique homogène, linéaire et isotrope-, (ε_{m0}, μ_{m0}))

De même on peut identifier la chaine de caractères « une trajectoire d' une particule libre dans le vide dans un volume parallélipédique d'un Référentiel inertiel» avec un concept général non-flou représentant les objets mathématiques de la forme :
(V_0, $\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$, -C_0- (C_0 étant un chaine de caractère désignant la nature de la particule, par exemple « proton », « électron »), i_0 (i_0 nombre identifiant la particule), m_0 (m_0 masse de la particule, nombre réel), q_0 (q_0 charge de la particule, nombre réel), x_{I0}, y_{I0}, z_{I0}, v_{xI0}, v_{yI0}, v_{zI0}, $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$).

Dans le multiplet précédent, V_0 est un volume parallélipédique, ($\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$) appartient au concept général non-flou « un champ électromagnétique dans le vide en abscence de charge dans un volume paralélipédique d'un Référentiel inertiel » (concept général non-flou défini précédemment) pour un volume V_0, (x_{I0},y_{I0},z_{I0}) et (v_{xI0},v_{yI0},v_{zI0}) sont respectivement des éléments de V_0 et de $\mathbf{R}^3$ appelés la

position et la vitesse initiales (pour t=0) de la particule). $x_0(t)$, $y_0(t)$,$z_0(t)$ sont des fonctions de $\mathbf{R}^+$ dans V_0 définies par la relation fondamentale de la dynamique ($\mathbf{F}_0=m_0\gamma_0$) $\mathbf{F}_0$ et γ_0 définis classiquement en fonction de $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ et de $x_0(t)$,$y_0(t)$,$z_0(t)$. On peut donc dire que (x(t),y(t),z(t)) est un concept particulier non flou défini uniquement en fonction des concepts particuliers non-flous m, q, x_I,y_I,z_I,v_{xI},v_{yI},v_{zI}, **B**,**E**)

Ici on n'a pas modélisé les grandeurs physiques dans lesquelles sont exprimées les variables physiques considérées. Cependant ceci est possible si on suppose que toutes ces variables sont exprimées en Unité du Système International (seconde, mètre, kg, Coulomb, Tesla…).On peut cependant modéliser aussi n'importe quelle grandeur physique. Par exemple on remplace D_0 par $D_0\times\{s\}$, « s » étant un caractère identifié à un objet mathématique existant, et modélisant ainsi la grandeur « seconde ».

De même, en électricité, on peut modéliser les appareils (résistance, condensateur, bobine d'induction, ampèremètre, voltmètre) par des concepts généraux.

Ainsi, « une résistance » est identifiée à un concept général pouvant représenter tous les objets mathématiques res_0 de la forme (-une résistance-, B1,B2, R_0, $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)\}$).

Dans la séquence précédente :

- « -une résistance- » , « B1 » et « B2 » sont des concepts généraux non-flous représentant (et identifiés) chacun avec un objet mathématique unique qui est une chaîne de caractère. (qui sont « -une résistance- » , « B1 » et « B2 »).

-R_0 est élément de $\mathbf{R}^{*+}$ appelé *valeur de la résistance* res_0.

-$\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$ est un ensemble de triplets de fonctions $Q_{B1B2}(t)$,$U_{B1B2}(t)$,$I_{B1B2}(t)$ telles que $Q_{B1B2}(t)$,$U_{B1B2}(t)$,$I_{B1B2}(t)$ sont des fonctions infiniment dérivables et définies de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, et telles que pour tout t dans $\mathbf{R}^+$ $Q_{B1B2}(t)=0$ et $U_{B1B2}(t)=-R_0I_{B1B2}(t)$. Cet ensemble est donc défini uniquement en fonction de R.

On montre facilement qu' « une résistance » est un concept général non-flou.

De même on identifie avec des notations analogues « un condensateur » à un concept général pouvant représenter tous les objets mathématiques $cond_0$ de la forme (-un condensateur-,B1,B2,C_0,$\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$).

Avec :

-C_0 est élément de $\mathbf{R}^{*+}$ appelé capacité de $cond_0$.

-$\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$ est un ensemble de triplets de fonctions $Q_{B1B2}(t)$,$U_{B1B2}(t)$,$I_{B1B2}(t)$ telles que $Q_{B1B2}(t)$,$U_{B1B2}(t)$,$I_{B1B2}(t)$ sont des fonctions infiniment dérivables et définies de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, et telles que pour tout t dans $\mathbf{R}^+$ $Q_{B1B2}(t)=C_0U_{B1B2}(t)$ et $I_{B1B2}(t)=d(Q_{B1B2}(t))/dt$. Cet ensemble est donc défini uniquement en fonction de C .

Plus généralement, un appareil électrique à 2 bornes sera un concept général non-flou pouvant repésenter tous les objets ap_0 de la forme :

(« -(nom de l'appareil)- »,B1,B2, C_{10},…,C_{p0}, $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$)

Les C_{i0} sont des constantes caractérisant l'appareil électrique. Et l'ensemble $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$ est défini uniquement en fonctions des C_i.

Dans certains cas (par exemple une diode), on n'a pas une équation (différentielle ou non) reliant U_{B1B2} et I_{B1B2}, mais une courbe, appelée caractéristique de l'appareil électrique, identifiée à un sous-ensemble Car_0 de $\mathbf{R}^2$. On utilise alors Car_0 pour définir l'ensemble $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)\}$) et on remplace les C_{i0} par Car_0.

On définit « un circuit » , comme un concept général non-flou pouvant représenter tous les objets l_0 de la forme :

l_0= (N_{C0}, -circuit- , f_0, $\{(A_{1,1},\dots,A_{p0(1),1}),..,(A_{1,f0},\dots,A_{p0(f0),f0})\}$,$n_0$, $\{e(1),..,e(n_0)\}$)

Dans le multiplet précédent :

-N_{C0} est une chaine de caractère donnant un nom de circuit.

-«-circuit- » est un concept général non-flou représentant un unique objet mathématique qui est la chaine de caractère « -circuit-».

-f_0 est le nombre de fils du circuit. Le terme suivant est un ensemble noté Efl_{NC0} contenant f_0 multiplets, notés $fl_1,\dots,fl_{f0}$, chacun étant appelé « un fil du circuit du circuit N_{C0} ». Chaque A_{i0j0} est appelé « un point du circuit N_{C0} » et est identifié au triplet (A,i_0,j_0), avec A symbole et i_0 et j_0 des naturels non nuls. $p_0(i)$ est une fonction (de $\{1,\dots,f_0\}$ dans **N***) donnant le nombre de points du $i^{ème}$ fil.

-n_0 est le nombre de nœuds du circuit. Un nœud est un point du circuit dont partent au moins 3 fils. Les nœuds sont désignés par $n_1,\dots,n_{n0}$.

-Pour i dans $\{1,\dots,n_0\}$, e(i) est l'ensemble des points du circuit coincidant avec n_i.

On supposera de plus que tout circuit l_0 vérifie :

-Tous les points de l_0 A_{i0j0} qui ne sont pas des nœuds sont distincts.

-Tous les $A_{1,i0}$ et les $A_{p0(i0),i0}$, (appelés extrémités du fil f_{i0}) sont des nœuds (sauf dans le cas où l_0 ne comporte qu'un fil), et réciproquement il n'y a pas de nœuds en un point du circuit N_{C0} qui n'est pas une extrémité d'un fil f_{i0}.

Le cas particulier le plus simple,c'est-à-dire la ligne de circuit la plus simple, avec 1 seul fil sera représentée par un multiplet :

$(N_{C0}$,-ligne-,1, $\{(A_{1,1},\dots,A_{p0(1),1},A_{1,1})\}$,0, Ø)

On sait qu'un circuit électrique contient des appareils électriques (résistances, condensateurs. ..) et on a vu qu'on pouvait identifier chacune de ces appareils à un objet mathématique (res_0, $cond_0$…). En général, ces appareils ont 2 bornes mais pas nécessairement (par exemple pour un transistor). Pour simplifier, on considèrera seulement le cas d'appareils à 2 bornes. On supposera de plus qu'il y a au plus un appareil entre 2 points successifs d'un fil du circuit considéré.

Si on a un circuit l_0, $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ étant 2 points successifs d'un fil f_{j0} de l_0, on identifiera « un appareil ap_0 entre $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ » au multiplet :

$(N_{C0},A_{i0,j0},A_{i+01,j0},ap_0)$.

Ce multiplet signifie que dans le circuit N_{C0}, $A_{i0,j0}$ coincide avec la 1^{ière} borne de ap_0, et $A_{i0+1,j0}$ avec la seconde. Dans le cas contraire on intervertit $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ dans le multiplet précédent

S'il n'y a pas d'appareils entre $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ (seulement le fil), l'appareil ap_0 entre $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ sera noté « 0 » dans le multiplet précédent.

On identifie alors « un circuit électrique » à un concept général non-flou représentant les objets mathématiques Cel_0 :

$Cel_0=(N_{C0}, l_0, Ap_0)$, défini par :

-« N_{C0}» est un concept général non-flou représentant un unique objet mathématique qui est une chaine de caractère , N_{C0} sera le nom du circuit.

-l_0 est un circuit (de nom de circuit N_{C0})

-Ap_0 est l'ensemble de tous les multiplets de la forme précédente $(N_{C0}, A_{i0,j0}, A_{i0+1,j0}, ap_0)$. Il y a un tel multiplet pour chaque couple $(A_{i0,j0},A_{i0+1,j0})$. On identifie donc l'objet mathématique Ap_0 à l'ensemble des appareils électriques sur le circuit.

Si on a un circuit électrique Cel_0, on dira que $(N_{C0},I_{01}(t),\dots,I_{0f0}(t))$ est le « multiplet intensité de Cel_0 » si $(I_{01}(t),\dots,I_{0f0}(t))$ sont défins de la façon suivante :

-Pour tout j_0, $I_{0j0}(t)$ est l'intensité dans le fil fl_{j0} de la ligne de circuit de Cel_0, dans le sens de $A_{1,j0}$ vers $A_{p0(j0),j0}$.

-Les $I_{0j}(t)$ sont des fonctions, infiniment dérivables et de $\mathbf{R}^+$ dans **R** (on peut remplacer $\mathbf{R}^+$ par tout intervalle de **R**), définis par les équations suivantes :

-Les équations de nœuds : La somme des intensités partant d'un nœud quelconque sont nulles.

-Les équations des appareils électriques du circuit : Si on a un élément de Ap_0 (N_{C0}, $A_{i0,j0}$, $A_{i0+1,j0}$, ap_0), l'ensemble $\{(Q_{BAB2}(t),I_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t))\}$ correspondant à ap_0 donne des équations entre les fonctions $Q_{Ai0,j0,Ai0+1,j0}(t)$,$I_{Ai0,j0Ai0+1,j0}(t)$ et $U_{Ai0,j0,Ai0+1,j0}(t)$.

-Les équations des boucles : Pour chaque fil j_0 du circuit électrique, on considère une boucle de circuit contenant j_0, c'est-à-dire une suite finie de points du circuit (notée $Bcl(j_0)$) (B_{1j0},….,B_{nj0},B_{1j0}) telle que cette suite contienne le fil j_0, et soit telle que 2 points successifs appartiennent à un même fil (c'est-à-dire soient reliés par un fil du circuit N_{C0}).

Alors pour chaque boucle $Bcl(j_0)$ on a :
$U_{B1j0B2j0}(t)+\ldots+U_{Bn-1j0Bnj0}(t)+ U_{Bnj0B1j0}(t)=0$.

(Certaines des équations précédentes ne sont pas indépendantes. On peut se limiter à un ensemble de boucles telles que chaque fil fl_{j0} appartienne à au moins une boucle. On doit au final utiliser f_0 équation indépendantes, afin que le multiplet intensité de Cel_0 soit défini uniquement en fonction de Cel_0.)

Dans le cas où on a un appareil électrique à b_0 bornes, avec $b_0>2$, on doit supposer que cet appareil est placé en un nœud du circuit d'où partent b_0 fils. On modélise alors l'appareil par un objet mathématique ap_0 analogue à res_0 et à $cond_0$: (nom de l'appareil, B1,…,Bb_0, C_{10},..,C_{p0}, $\{(I_{Nb0B1}(t),\ldots,I_{Nb0Bb0}(t), U_{B1B2}(t),\ldots\ldots,U_{Bb0-1Bb0}(t))\}$).
Dans le multiplet précédent, les termes sont analogues aux multiplets représentant une résistance ou un condensateur mais on a supprimé les fonctions analogues à $Q_{B1B2}(t)$.

On voit donc que pour toute science utilisant des mathématiques, on peut modéliser cette sciences par des objets mathématiques, et des concepts particuliers ou généraux, existants et définis d'après la TMP. Ceci est en particulier vrai en économie. C'est aussi le cas dans des domaines considérés comme non scientifiques, comme le jeu d'échec ou la comptabilité.

6.CONCLUSION :

On a donc vu dans cet article que la TLP est une théorie mathématique de logique pouvant interpréter l'ensemble des mathématiques classiques . Cette théorie mathématique est entièrement nouvelle et donne une justification théorique au Principe de Non-contradiction et au Principe du Tiers exclu qui sont admis axiomatiquement dans les théories actuelles de logique formelle. On a vu aussi que la TLP donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques. La TLP fait apparaître une analogie remarquable entre la construction de toutes les théories mathématiques classiques ainsi qu'entre la construction de toutes les propositions mathématiques et les démonstrations utilisées en mathématiques. La TLP modélise en effet toutes les théories mathématiques classiques ainsi que les propositions et démonstrations qu'elles utilisent à l'aide d'un code Platoniste.

Ainsi la TMP apparaît comme une théorie mathématique fondamentale permettant de comprendre le sens profond des mathématiques. Elle apparaît comme étant à la fois un théorie des théories matématiques et aussi comme la théorie de toute théorie scientifique (notamment physique) utilisant des mathématiques.

Références :

1.T.Delort, Théorie mathématique Platoniste- Théorie des ensembles (2016), Extrait du livre Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2016).
2.Nagel, Newman,Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
3. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionnary (G.B, 1989)
4. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
5. Largeault, Logique Mathematiques, Armand Colin,(Paris ,1992)
6. P.Thiry, Notions de logique,Deboeck Université,(Bruxelles ,1998)
7.Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)

2ième THEORIE :

THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.

Auteur :Thierry DELORT.
Date :Mars 2020.

1ier article : **THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE I :CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH.**

2ième article :**THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE II :CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.**

TABLES DES MATIERES.

Titre :THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES – PARTIE I : CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH
Auteur :Thierry DELORT
Date :Septembre 2019
Extrait du livre : Théories d'or 10e édition, Editions Books on Demand, Paris (2020)

Résumé :

Nous avons présenté en 2 articles (Théorie Aléatoire des Nombres (T.A.N) Parties I et II) une théorie mathématique étudiant le hasard en théorie des nombres, dont l'importance est fondamentale. Cette théorie fait apparaître que certaines propositions en théorie des nombres ont une explication théorique basée sur le hasard, sans que rien n'indique qu'elles aient en plus une démonstration classique, c'est-à-dire utilisant seulement les Axiomes classiques de la théorie des nombres. Au contraire, on peut penser que leur seule explication mathématique théorique est basée sur le hasard.

Nous avons appelé Théorie Aléatoire des Nombres cette théorie très générale permettant d'étudier ces propositions, elle est basée sur un Axiome fondamental, l'Axiome du Hasard, et aussi sur un nouveau type de proposition appelées pseudo-Axiomes aléatoires, propres à cette théorie et admis sans démonstration comme les Axiomes et dont la nécessité est la conséquence de l'Axiome du Hasard. Ainsi, la TAN permet d'obtenir des explications théoriques aléatoires, c'est-à-dire basées sur le hasard, à certaines propositions qui n'ont pas de démonstration classique.

Dans ce premier article (T.A.N-Partie I) nous présentons les plus simples Axiomes et pseudo-Axiomes de cette théorie, et nous verrons qu'ils permettent malgré leur simplicité d'obtenir une explication théorique basée sur le hasard (appelée *explication aléatoire*) pour la Conjecture faible de Goldbach. Dans la seconde partie (T.A.N-Partie II), nous développerons cette théorie pour obtenir des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres premiers jumeaux.

1.INTRODUCTION

La T.A.N (Théorie Aléatoire des Nombres) est une théorie destinée à étudier le hasard en théorie des nombres. Elle est basée sur l'Axiome fondamental suivant :

AXIOME 1 : (Axiome du Hasard)
Des modèles statistiques non-certains expriment les propriétés des nombres.

On dira qu'un modèle statistique est *non-certain* si on ne peut démontrer classiquement son existence, c'est-à-dire en utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres.

On justifie l'Axiome du Hasard d'une part parce qu'il n'y a pas de raison pour lesquelles des modèles statistiques n'existeraient pas en Théorie des Nombres, et s'ils existent on devrait s'attendre à ce qu'ils soient définis en utilisant la Théorie des probabilités. Or dans la Théorie des Nombres classiques, il n'y a aucun exemple dans lequel on utilise la théorie des probabilités pour obtenir une proposition.

Il est évident que si l'Axiome du Hasard est vrai, on ne pourra jamais le démontrer classiquement, en effet, il est équivalent à :
« Des modèles statistiques exprimant des propriétés des nombres existent alors qu'on ne peut montrer classiquement, c'est-à-dire utilisant les Axiomes de la théorie des nombres classiques, leur validité.

Il est donc de la forme :
P : Q est vraie, mais on ne peut démontrer classiquement Q.

Il est clair que si une telle proposition P est vraie, on ne pourra jamais la démontrer car pour démontrer classiquement P on doit démontrer classiquement Q , ce qui est impossible si P est vraie. Et donc si l'Axiome du Hasard est vrai, on ne peut l'obtenir que de façon axiomatique.

On voit que la conséquence de l'Axiome du Hasard, si on le suppose vrai, est qu'il est nécessaire d'utiliser une logique nouvelle, différente de celle utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres, pour obtenir des modèles non-certains. On appellera *logique du hasard* une telle logique. On verra que la Théorie Aléatoire des Nombres est fondamentale car elle permet de donner des *explications aléatoires*, c'est-à-dire des explications théoriques basées sur le hasard à de très nombreuses conjectures jamais démontrées, et en particuliers aux Conjectures fortes et faibles de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

La T.A.N, basée sur l'Axiome du Hasard précédent, étudie les modèles statistiques non-certains et leurs conséquences. Elle utilise des propositions d'un type nouveau, qu'on a appelé pseudo-Axiome aléatoires, qui sont analogues aux Axiomes classiques, c'est-à-dire qu'ils sont de formulation simple et qu'ils peuvent être justifiés par des arguments intuitifs évidents ou sont évidents. Ces pseudo-Axiomes aléatoires constituent la logique du hasard en théorie des nombres que nous avons défini précédemment. Ainsi, ils expriment l'existence, dans des cas particuliers complètement définis, de modèles statistiques exprimant les propriétés des nombres, et définis en utilisant la théorie des probabilités.

De plus une conséquence de l'Axiome du Hasard et de l'existence de modèles statistiques est qu'on obtient des propositions modélisées par des évènements non-certains. On verra qu'un pseudo-Axiome de la T.A.N permet d'obtenir dans certains cas des propositions classiques si elles sont modélisées par des évènements de probabilité proche de 1. La T.A.N n'est utile que si on utilise des modèles statistiques non-certains, car il est évident que tout modèle statistique certain ne nécessite pas la T.A.N pour être justifié.

Nous présentons dans ce premier article (T.A.N-PARTIE I :Conjecture faible de Goldbach) une application très simple et fondamentale de cette théorie, on voit qu'elle permet de donner une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication mathématique théorique utilisant seulement les Axiomes et pseudo-Axiomes de la T.A.N, à la Conjecture faible de Goldbach.

Cette explication théorique aléatoire présentées dans ce premier article est la première justification mathématique théorique de la Conjecture faible de Goldbach.

Il y a déjà eu des approches probabilistes pour expliquer la Conjecture de Goldbach, mais celles-ci étaient purement intuitives, et n'envisageaient pas ni ne montraient que celle-ci pouvait être expliquée par le hasard d'une façon théorique.

Ainsi, par exemple, Hardy et Littlewood [(6)] ont proposé une formule empirique estimant pour tout nombre pair n le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n :

$$r(n) \cong 2\Pi_2 \left(\prod_{p/n, p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{n}{\ln(n)^2}$$

où $\Pi_2 \approx 0,66016$

Cette conjecture est obtenue [(6)] en utilisant la Théorie des nombres classique, et non en utilisant des probabilités comme on le dit fréquemment, elle est appelée Conjecture forte (ou « étendue ») de Goldbach et n'a jamais été démontrée tout comme la Conjecture faible de Goldbach (Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers).

Il est important de constater que ce premier article ne consiste pas à obtenir par des arguments intuitifs que le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n est de l'ordre de $n/\ln^2(n)$, ce qui a déjà été fait, et de manière beaucoup plus précise par Hardy et Littlewood. En fait, il présente une théorie permettant de montrer que le hasard et ses lois expliquent la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres qui n'ont pas de démonstration classique. Une telle théorie du hasard et de ses lois en théorie des nombres, basée sur l' Axiome du Hasard et utilisant les pseudo-Axiomes et les définitions de concepts fondamentaux que nous proposons, est totalement nouvelle. En particulier nous définissons les concepts nouveaux et fondamentaux de propositions *modélisées*, ou *modélisées exactement* par des évènements ainsi que de *lois numériques aléatoires*.

En résumé, l'idée que le hasard puisse être à l'origine et la seule explication existante de la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres, l'Axiome du Hasard exprimant cette idée, la Théorie du hasard dans les nombres proposée basée sur l'Axiome du Hasard, d'un formalisme nouveau et utilisant des pseudo-Axiomes et de nouvelles définitions, et son application à la Conjecture faible de Goldbach, apparaissent comme étant des éléments nouveaux et fondamentaux de la théorie des nombres présentée dans cet article. On présente dans ce premier article les plus simples pseudo-Axiomes ainsi que les concepts fondamentaux comme ceux de propositions *modélisées* par des évènements ainsi que celui de *loi numérique aléatoire*, mais la Théorie Aléatoire des Nombres peut être développée. Ceci sera fait dans le second article, T.A.N-Partie II, où nous donnerons notamment une explication aléatoire aux Conjectures fortes Goldbach (Très proche de celle proposée par Hardy et Littlewood) et des nombres premiers jumeaux (Identique à celle proposée par Hardy et Littlewood).

Dans les 2 articles exposant la Théorie aléatoire des nombres, on appellera *espace probabilisable* un triplet (**Ω**,T,p) avec **Ω** ensemble non vide, T tribu sur **Ω** et p mesure sur T, alors que souvent on appelle espace probabilisable (**Ω**,T) et (**Ω**,T,p) un *espace probabilisé*. On pourra aussi parfois utiliser le caractère « **Ω** » pour représenter un espace probabilisable mais cela sera toujours indiqué.

2.THEORIE

Nous allons étudier dans la T.A.N une catégorie de propositions particulière que nous avons appelées *loi numérique aléatoire* .

DEFINITION 2.1 :

a) « *est modélisée par*» est une relation qui peut exister entre des propositions et des évènements d'espaces probabilisables, définie par la *propriété de correspondance* suivante :

Si P1 et P2 sont 2 propositions, et que Ev1 et Ev2 sont 2 évènements d'un même espace probabilisable, et si on a :
P1 *est modélisée par* Ev1.
P2 *est modélisée par* Ev2.
Alors :
La proposition « P1 et P2 » *est modélisée par* l'évènement « Ev1 et Ev2 ».
La proposition « P1 ou P2 » *est modélisée par* l'évènement « Ev1 ou Ev2 »
La proposition Non(P1) *est modélisée par* l'évènement Non(Ev1).

b)Soit F un sous-ensemble de **N**.
f est une fonction de F dans **N**, telle que f(k) est élément d'un ensemble fini F(k).
Xf(k) est une variable aléatoire à valeur dans F(k).

On appellera *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :
« f(k) *est modélisée par la variable aléatoire* Xf(k) »

Par définition, cela signifie que pour tout k dans F, et tout i_k dans F(k), la proposition « f(k)=i_k » est modélisée par l'évènement « Xf(k)=i_k ».

REMARQUE 2.2 :

a)« P1 est modélisée par un évènement Ev1 » signifiera intuitivement que si le modèle statistique permettant d'obtenir la proposition précédente est valide avec une bonne approximation, P1 se comporte comme s'il avait les propriétés statistiques d'Ev1. Nous admettrons des propositions, appelées pseudo-Axiomes aléatoires, modélisant des propositions par des évènements en accord avec la signification intuitive précédente.

b)En réalité, avec les notations du 2.1b) pour que la T.A.N soit intéressante, on doit être dans l'un des 2 cas suivants :
-Ou bien F est infini, mais pour tout k appartenant à F, on connaît un nombre fini d'étapes permettant d'obtenir f(k) (utilisant dans la pratique un ordinateur).
-Ou bien F est fini (en général, F aura un seul élément, par exemple F={1}), mais pour au moins un élément k de F on ne connaît pas un nombre fini d'étapes permettant d'obtenir f(k).
Dans l'article, on supposera qu'on est toujours dans l'un de ces cas.

c)La T.A.N permet d'obtenir toutes sortes de propositions classiques, mais elle n'est intéressante que pour obtenir des propositions qu'on n'a jamais démontrées classiquement et qui de plus sont illustrées et en accord avec tous les tests réalisés, un test étant un nombre fini d'opérations.

Par exemple, on sait que si, à l'aide d'un ordinateur, on vérifie pour des naturels pairs s'ils sont la somme de 2 nombres premiers, on trouvera toujours que c'est le cas. Ils vérifient donc la loi générale « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers », c'est-à-dire la Conjecture de Goldbach qui est donc à la fois illustrée et en accord avec tous les tests réalisés et de plus n'a jamais été démontrée classiquement. Elle fait donc partie des propositions classiques intéressantes à obtenir par la T.AN d'après la Remarque 2.2.

Supposons maintenant qu'on ait obtenu la loi numérique aléatoire sur F={1} suivante, t(P) étant une fonction à de F dans F(1)={0,1} :
« t(P)(1) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P)(1) ».
avec p(« Xt(P)(1)= 1 ») $>1-10^{-5}$.(Pour simplifier, on identifiera parfois t(P)(1) avec t(P), puisque F n'a qu'un élément. En général, P sera une proposition et t(P) sera la fonction vérité de P, c'est-à-dire : Si P est vraie, t(P)(1)=1, sinon t(P)(1)=0).

Si le modèle statistique ayant conduit à obtenir la loi numérique aléatoire précédente est valide avec une suffisamment bonne approximation, P se comporte comme un évènement de probabilité très proche de 1 et donc une conséquence de ceci peut être que P est vraie.

Comme la conséquence t(P)(1)=1 n'est pas toujours vraie, on l'obtient par un pseudo-Axiome, le *pseudo-Axiome 2.3 du modèle exact* exposé ci-après, et admis sans démonstration comme un Axiome :

PSEUDO-AXIOME 2.3 (du modèle exact):

Si P est une proposition classique et si on a une loi numérique aléatoire sur un ensemble F={1} « t(P)(1) est modélisée par Xt(P)(1) » avec t(P)(1) à valeurs dans {0,1} et p(« Xt(P)(1)=1 »)≈1, alors lorsque le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact est valide pour la loi numérique aléatoire précédente, on obtient t(P)(1)=1.

En fait la TA.N utilise 2 sortes de pseudo Axiomes aléatoires. Le premier pseudo Axiome est le pseudo Axiome du modèle exact précédent. La seconde sorte de pseudo Axiomes permet d'obtenir des modèles statistiques représentant des caractéristiques de fonctions numériques f(k). Ces modèles statistiques permettront d'obtenir des lois numériques aléatoires concernant f(k).

En fait, dans la T.A.N, tous les modèles statistiques sont obtenus par des pseudo Axiomes aléatoires. La raison en est qu'il apparaît qu'un modèle statistique peut être valide dans un cas et invalide dans un autre cas tout à fait analogue.

Le second pseudo Axiome aléatoire de la T.A.N introduit le modèle le plus simple : le modèle équiprobable.
Nous allons tout d'abord justifier ce pseudo Axiome aléatoire :
Cette justification intuitive donnée ci-après est assez simple. On peut en fait admettre sans démonstration ce pseudo-Axiome car il est à la fois très simple et évident, de la même façon qu'on admet les Axiomes dans les Théories mathématiques.

Supposons qu'on ait un ensemble E contenant n éléments, et qu'on sache qu'un sous-ensemble de E noté A contient un nombre a d'éléments.
On considère la proposition : P : « x est élément de A », et on suppose qu'on ignore si P est vraie ou fausse.
On considère alors seulement que x est un élément d'un ensemble contenant a éléments, lui-même sous-ensemble d'un ensemble contenant n éléments.

On peut alors considérer que x est fixé, et que A peut alors être n'importe quel sous-ensemble de E avec a éléments, avec équiprobabilité pour chaque sous-ensemble. On obtient alors de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est égale à a/n.
Si par contre on considère que A est fixé, et que x peut être n'importe quel élément de E avec équiprobabilité, on obtient aussi de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est aussi égale à a/n.
On obtient aussi la même probabilité (que P soit vraie) en considérant que (x,A) peut être avec équiprobabilité n'importe quel couple dont le premier terme est un élément de E et le second terme est un sous-ensemble de E contenant a éléments.

Ainsi d'après ce qui précède si on a une proposition de la forme $P(A_k,\Omega_k)$: « x_k est élément de A_k », où A_k est un sous-ensemble fini d' un ensemble Ω_k, connaissant le nombre d'éléments de A_k et de Ω_k, si on considère seulement dans la proposition précédente le fait que x_k est un élément d'un ensemble A_k contenant $Card(A_k)$ éléments, lui-même sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k contenant $Card(\Omega_k)$ éléments, alors si de plus on ignore si $P(A_k,\Omega_k)$ est vraie ou fausse, $P(A_k,\Omega_k)$ se comporte comme si elle avait la probabilité d'être vraie de l'évènement $Ev(A_k,\Omega_k)$: « $x_{(k)}$ est élément de A_k » de l'espace probabilisable équiprobable (Ω_k, $\mathcal{P}(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$), où $p_{eq\Omega k}$ représente la probabilité équiprobable sur l'Univers Ω_k.

Ainsi, ce qui précède est la justification intuitive du pseudo Axiome aléatoire suivant, permettant d'obtenir de nombreuses lois numériques aléatoires:

PSEUDO-AXIOME 2.4 :(du modèle équiprobable) :

Si on a une proposition P_k : « x_k est élément de A_k », où A_k est un ensemble fini dont on connaît le nombre d'éléments, qui est un sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k dont on connaît aussi le nombre d'éléments, alors lorsque le *pseudo- Axiome du modèle équiprobable* est valide pour (x_k,A_k,Ω_k) :
La proposition P_k :« x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace probabilisable (Ω_k ,$\mathcal{P}(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$) où pour tout ensemble Ω la probabilité $p_{eq\Omega}$ désigne la probabilité équiprobable sur Ω.
On appellera plus simplement l'espace probabilisable (Ω_k,$\mathcal{P}(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$) « espace équiprobable Ω_k » .

REMARQUE 2.5 :

On a choisi la notation « $x_{(k)} \in A_k$ » plutôt que « A_k » ou « $x \in A_k$ » pour représenter l'évènement modélisant « x_k appartient à A_k » car il est clair que cet évènement est différent d'un évènement modélisant « y_k appartient à A_k » où $y_k \neq x_k$. Dans ce cas, bien qu'on ait désigné les espaces probabilisables auxquels ils appartiennent par la même notation (Ω_k,$\mathcal{P}(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$), ils sont différents. On pourra les distinguer en les notant : ($x_{(k)}$,(Ω_k,$\mathcal{P}(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$)) et ($y_{(k)}$,(Ω_k,$\mathcal{P}(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$)).

Il est clair qu'avec ce modèle :

$$p_{eq\Omega k}(x_{(k)} \in A_k) = \frac{Card(A_k)}{Card(\Omega_k)}$$

en général, on appliquera ce pseudo Axiome pour (x_k,A_k,Ω_k), avec A_k appartenant à un sous-ensemble A de $P(\Omega_k)$. On écrira alors qu'on a supposé que le pseudo Axiome du modèle équiprobable était valide pour (x_k,A,Ω_k). Nous allons montrer qu'on peut toujours considérer que A est une tribu (sigma-algèbre):

REMARQUE 2.6 :

On rappelle d'après la Définition 2.1a) et b) *la propriété de correspondance* :

Si la proposition X est modélisée(ou est modélisée exactement) par EvX et la proposition Y par EvY, EvX et EvY appartenant au même espace probabilisable alors :
-La proposition Non(X) est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement Non(EvX).
-La proposition « X et Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement « EvX et EvY »
-La proposition « X ou Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement « EvX ou EvY »

Il en résulte que si X1,..,Xn sont des propositions modélisées (ou modélisées exactement) par des évènements Ev1,….Evn d'un même espace probabilisable, alors toute proposition P(X1,..,Xn) construite à partir de X1,…,Xn, utilisant seulement des « et », des « ou » et des « non » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement P(Ev1,..,Evn) (qui est aussi un évènement de l'espace probabilisable). Ceci est obtenu car « et », « ou », « non » ont les mêmes propriétés utilisés avec des propositions ou utilisés avec des évènements d'un espace probabilisable (commutativité, associativité,distributivité….)

On a alors le Théorème :

THEOREME 2.7 :

(i) Si le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k) et (x_k,B_k,Ω_k), alors il est valide pour (x_k,$A_k U B_k$, Ω_k) ,pour (x_k, $A_k \cap B_k$,Ω_k) et pour (x_k,Ω_k/A_k,Ω_k).

(ii)L'ensemble B_k des sous-ensembles A_k de Ω_k tels que l' Axiome du modèle équiprobable soit valide pour (x_k,A_k,Ω_k) est une tribu.

Démonstration :
Si l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k), alors la proposition « x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
D'après la propriété de correspondance, Non(« x_k appartient à A_k ») est modélisée par l'évènement Non(« $x_{(k)} \in A_k$ »)
Ceci est équivalent à :
« x_k appartient à Ω_k/A_k » est modélisée par « $x_{(k)} \in \Omega_k / A_k$ ».
Donc l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,Ω_k/A_k,Ω_k).

Si l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k) et pour (x_k,B_k,Ω_k) :
La proposition « x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
La proposition « x_k appartient à B_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in B_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
Donc en utilisant la propriété de correspondance:

La proposition « «x_k appartient à A_k » et « x_k appartient à B_k » » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ et $x_{(k)} \in B_k$ », ce qui est équivalent à :

La proposition : « x_k appartient à $A_k \cap B_k$ » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k \cap B_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
Ce qui signifie exactement que l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,$A_k \cap B_k$,Ω_k).

On montre de même qu'il est valide pour (x_k,$A_k U B_k$,Ω_k).
On a donc montré le Théorème 2.7a), qui entraîne le Théorème 2.7b).

On a donc montré le Théorème 2.7.

On verra que le pseudo Axiome aléatoire du modèle équiprobable a de nombreuses applications dans la T.A.N. Il permet en effet d'obtenir de nombreux modèles statistiques.

En général, si on obtient une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :
« f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) »
on ne peut pas en obtenir des propositions classiques. Cependant il semble évident que dans certains cas, on peut considérer que les variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes entre elles. Comme ceci n'est pas toujours vrai, on l'obtient par un pseudo-Axiome très simple, le pseudo-Axiome des variables indépendantes :

PSEUDO-AXIOME 2.8 des variables indépendantes :

Si on a une loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par Xf(k) » alors lorsque le pseudo-Axiome des variables indépendantes est valide pour cette loi, on obtient la loi numérique aléatoire « f(k) est modélisée par Xf(k) », où les variables aléatoires sont indépendantes entre elles, définies sur un Univers infini si F est infini.

REMARQUE 2.9 :

En réalité, si on obtient une loi numérique aléatoire « f(k) est modélisée par Xf(k) » en utilisant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable, on peut en général obtenir qu'un nombre fini des variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes entre elles, par application du modèle équiprobable sur un produit fini d'Univers associés aux variables aléatoires.

Ceci s'obtient en utilisant que si on a des Univers finis Ω_1,..,Ω_n, et des ensembles A_1,..,A_n avec pour tout i A_i est inclus dans Ω_i, alors :

$$\frac{Card(A_1 \times \ldots \times A_n)}{Card(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} Card(A_i)}{\prod_{i=1}^{n} Card(\Omega_i)}$$

Il en résulte que dans l'espace probabilisable équiprobable d'Univers $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, les évènements « $x_{(i)}$ est élément de A_i » sont indépendants entre eux.

En généralisant ceci à un Univers produit infini, on obtient comme dans le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes précédents que les variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes sur un Univers infini.

Cette Remarque 2.9 constitue aussi une justification intuitive du pseudo-Axiome 2.8 précédent des variables indépendantes.

Ainsi la T.A.N présentée dans cet article repose sur le pseudo Axiome2.3 du modèle exact, le pseudo Axiome du modèle équiprobable et le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes.

On utilise ces pseudo Axiomes pour obtenir des lois numériques aléatoires et des propositions classiques. Comme on l'a dit dans la Remarque 2.2, seules les propositions classiques qui n'ont jamais été démontrées classiquement mais qui sont illustrées et en accord avec tous les tests réalisés sont intéressants. On verra notamment qu'on peut obtenir la Conjecture de Goldbach et des propositions classiques en accord et illustrées par les tests définissant la Comète de Goldbach obtenue par ordinateur.

DEFINITION 2.10 :

a) On appellera *pseudo-preuve aléatoire* d'une loi numérique aléatoire ou d'une proposition classique son obtention utilisant les pseudo-Axiomes de la T.A.N, ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.
b) On dira qu'une proposition classique a une *explication aléatoire* si elle a une pseudo-preuve aléatoire et que celle-ci est très intéressante, puisqu'elle répond aux critères suivants :

-On n'a jamais pu la démontrer ni sa négation.
-Elle est illustrée par des tests .
-Si des propositions contradictoires P1,..,Pn ont des pseudo-preuves aléatoires, une seule d'entre elles, celle la mieux illustrée par les tests, pourra avoir une explication aléatoire. Si les tests ne peuvent départager, on choisira celle obtenue par le modèle statistique le plus précis.

Les définitions données précédemment n'ont pas la même nature : Si on peut considérer que a) donne une définition mathématique d'une *pseudo-preuve aléatoire*, cela n'est pas le cas de la définition d'une *explication aléatoire* donnée en b). En effet, on utilise l'expression « proposition ayant une explication aléatoire » pour désigner une proposition ayant une pseudo-preuve aléatoire celle-ci étant très intéressante, car elle répond à certains critères. Et donc *explication aléatoire* n'a pas de définition mathématique formelle, contrairement à *pseudo-preuve aléatoire*.

La T.A.N permet de mettre en évidence que le hasard et ses lois expliquent la validité de certaines propositions (propositions, lois numériques aléatoires exacte). Il n'y a aucune raison à priori pour que ces propositions aient en plus une démonstration classique : Il est très possible que certaines de ces propositions aient uniquement le hasard comme origine de leur validité. De plus on peut s'attendre à ce que seules certaines propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire soient en accord et illustrées par tous les tests réalisés et donc aient une explication aléatoire intéressante.

REMARQUE 2.11 :

a)On rappelle t(P)=1 si P vraie et t(P)=0 si P fausse. Si P(k) est une proposition dépendant d'un naturel k, on considèrera souvent la fonction t(P(k)) en vue d' obtenir des lois numériques aléatoires.

b) Si une proposition classique a une explication aléatoire (Déf 2.10), alors le fait qu'elle concerne une infinité de naturels est nécessaire pour qu'on ne puisse la démontrer classiquement ni sa négation. Ceci justifie les 2 types de lois numérique aléatoires considérées, sur un ensemble F fini ou infini.

c) Nous allons montrer que la Conjecture de Goldbach a une explication aléatoire , sa pseudo-preuve aléatoire utilisant les pseudo-Axiomes très simples de la T.A.N présentées dans cet article, et que la T.A.N permet d'obtenir des propositions classiques ayant une explication aléatoire en accord et illustrées par les tests obtenus par ordinateur définissant la Comète de Goldbach.

d) Si on montre qu'une proposition classique a une explication aléatoire, on n'a pas prouvé qu'elle est vraie mais on a prouvé trois aspects essentiels de la proposition considérée:

- Elle a une explication théorique basée sur le hasard, obtenue à partir d'Axiomes et de pseudo-Axiomes de la T.A.N, qui sont simples et ont un caractère d'évidence tout comme les Axiomes classiques.
- Cette explication théorique basée sur le hasard et ses lois, appelée *explication aléatoire*, montre qu'elle peut être la conséquence de modèles statistiques qui sont complètement déterminés et dont on connaît l'origine de la validité en considérant les pseudo Axiomes utilisés pour les obtenir.
-Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la proposition n'a pas de preuve classique, et qu'il est tout à fait possible qu'elle soit la pure conséquence du hasard et de ses lois et n'ait donc pas de preuve classique.

3.APPLICATIONS

Nous allons établir que la Conjecture faible de Goldbach a une explication aléatoire. Ainsi, d'après ce qui précède, on va démontrer que la Conjecture de Goldbach a une explication rationnelle basée sur le hasard et mettre en évidence les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence.

On rappelle la Conjecture de Goldbach :
« Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers ».

APPLICATION 3.1 :

k étant un naturel pair, on considère la proposition P(k) :
P(k) :« k est la somme de 2 nombres premiers ».
On définit les ensembles :
E(k) est l'ensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k.
A(k) est l'ensemble de paires de nombres premiers inférieurs à k.
B(k) est l'ensemble de paires de naturels impairs dont la somme donne k.
On note a(k),b(k),e(k) le nombre d'éléments de A(k),B(k),E(k).
Dans ce qui suit, i,j,k représenteront toujours des naturels pairs.

On considère la fonction f(k)=t(P(k)).
On pose :
$\Omega(k)=\{(A_k,B_k)$, A_k et B_k sous-ensembles de E(k) ayant a(k) et b(k) éléments}
$C^*(k)=\{(A_k,B_k)$ tels que (A_k,B_k) appartient à Ω(k) et A_k et B_k ont au moins un élément en commun}.
(Formellement il eût été préférable de considérer que Ω(k) est l'ensemble des couples $(A_k,B(k))$ de même que C*(k), mais on vérifie que les 2 choix de Ω(k) conduisent aux mêmes résultats).
Alors, on remarque que P(k) s'exprime :
P(k) :« (A(k),B(k)) appartient à C*(k) »
Donc, on suppose que le pseudo-Axiome 2.4 du modèle équiprobable est valide pour ((A(k),B(k)),C*(k),Ω(k)).
On obtient alors :
P(k) est modélisée par l'évènement « C*(k) » (ou « $(A_k, B_k) \in C^*(k)$ ») de l'espace équiprobable $(\Omega(k), \mathcal{P}(\Omega(k)), p_{eq\Omega(k)})$.

On rappelle la définition formelle d'une loi numérique aléatoire (Définition 2.1):

DEFINITION 3.1.1 :

Si f(k) est une fonction définie sur un sous-ensemble F de **N** et que pour tout k appartenant à F ,f(k) appartienne à un ensemble fini de naturels $\{x_{k,1},\ldots,x_{k,n(k)}\}$, alors on aura la loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) » si pour tout k appartenant à F, Xf(k) soit à valeurs dans $\{x_{k,1},.. ,x_{k,n(k)}\}$ et la proposition « $f(k)=x_{k,i}$ » soit modélisée par l'évènement « $Xf(k)=x_{k,i}$ », Xf(k) étant pour tout k une variable aléatoire définie ou partiellement définie.

REMARQUE 3.1.2 :

Une application immédiate de cette Définition est le cas où pour k appartenant à un sous-ensemble F de **N**, on a une proposition P(k) qui est modélisée par un évènement Ev(k) d'un espace probabilisable (Ω_k,B,p_k), identifié avec Ω_k.
On définit alors la variable aléatoire XtP(k) sur l'espace probabilisable Ω_k, à valeur dans {0,1}, et telle que l'évènement Ev(k) est identifié à l'évènement « XtP(k)=1 ». Alors comme P(k) est équivalente à « t(P(k))=1 », on obtient la loi numérique aléatoire « t(P(k)) est modélisée par la variable aléatoire XtP(k) » avec $p(XtP(k)=1)=p_k(Ev(k))$

On obtient donc d'après cette remarque la loi numérique aléatoire :

H(P(k)) « t(P(k) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(k)) avec :

$$p(Xt(P(k))=1)=p_{eq\Omega(k)}(C^*(k))=\frac{Card(C^*(k))}{Card(\Omega(k))}$$ ».

On pose alors :
C(k)(0)= {(A_k,B_k) / (A_k,B_k) appartient à Ω(k) et A_k et B_k ont 0 éléments en commun}.
Il est alors évident : C*(k)=Ω(k)/C(k)(0)

En utilisant les formules classiques de dénombrement on obtient :

$$Card(\Omega(k))=C_{e(k)}^{a(k)}C_{e(k)}^{b(k)}$$

$$Card(C(k)(0))=C_{e(k)}^{b(k)}C_{e(k)-b(k)}^{a(k)}$$

Donc :

$$p_{eq\Omega(k)}(C(k)(0))=(\frac{e(k)-b(k)}{e(k)})(\frac{e(k)-b(k)+1}{e(k)-1})...(\frac{e(k)-b(k)-a(k)+1)}{e(k)-a(k)+1})$$

donc :

$$p_{eq\Omega(k)}(C(k)(0))=(1-\frac{b(k)}{e(k)})(1-\frac{b(k)}{e(k)-1})...(1-\frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1})$$

On pose :

$p(a(k),b(k),e(k)=p_{eq\Omega(k)}(C(k)(0))$.

On a donc :

$p_{eq\Omega(k)}(C^*(k))=1-p(a(k),b(k),e(k))$

On cherche une approximation de p(a(k),b(k),e(k)).

On a :

$$(1-\frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1})^{a(k)}\leq p(a(k),b(k),e(k))\leq(1-\frac{b(k)}{e(k)})^{a(k)}$$

De plus on peut écrire:

$$(1-\frac{b(k)}{e(k)})^{a(k)}=\exp(a(k)Log(1-\frac{b(k)}{e(k)}))$$

On verra plus loin en calculant les expressions de a(k),b(k),e(k) que pour k tendant vers l'infini on a a(k)/e(k) et b(k)/e(k) tendent vers 0 et a(k)b(k)/e(k) tend vers l'infini.
Dans la suite, la notation $\varepsilon_i(k)$ désignera toujours une fonction tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini.
En utilisant que si $\varepsilon_1(k)$ tend vers 0 pour k tend vers l'infini, alors il existe une fonction $\varepsilon_2(k)$ tendant aussi vers 0 pour k tendant vers l'infini telle que $Log(1+\varepsilon_1(k))=\varepsilon_1(k)\,(1+\varepsilon_2(k))$, on arrive facilement à :

$$p(a(k),b(k),e(k)) = \exp(-\frac{a(k)b(k)}{e(k)}(1+\varepsilon(k)))$$

où ε(k) est une fonction tendant vers 0 pour k tend vers l'infini.

Calculons maintenant a(k),b(k),e(k).
E(k) est l'ensemble des pairs {x,y} de naturels impairs inférieurs à k. e(k) est le nombre d'éléments de E(k).
Si k est pair, k=2p, il y a p naturels impairs inférieurs à k : {1,…,2p-1}.
Donc $e(k)=(p^2-p)/2$, car il y a p^2 couples (x,y) mais p^2-p couples (x,y) avec x≠y.
On a donc $e(k)=(p^2-p)/2 \approx k^2/8$

On emploiera la notation f(k)≈g(k) si il existe une fonction ε(k) tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini avec f(k)=g(k)(1+ε(k)).

Il nous suffit d'étudier P(k) pour k supérieur à 10000 car utilisant un ordinateur on a déjà montré que P(k) était vrai pour k inférieur à 10000.

A(k) est l'ensemble de paires {x,y} de nombres premiers inférieurs à k, et on sait qu'une estimation du nombre de nombres premiers inférieurs à k est égale à k/Log(k).
Il en résulte que le nombre d'éléments a(k) de A(k) est estimé par:

$$a(k) \approx \frac{1}{2}(\frac{k}{Log(k)})^2$$

Enfin B(k) est l'ensemble des paires {x,y} de nombres impairs tels que x+y=k.
On a (si k= 2p) pour x l'ensemble des valeurs {1,…,2p-1}, soit p valeurs, et alors y est complètement déterminé.
Il en résulte qu' une estimation de b(k) le nombre d'éléments de B(k) est :
b(k)≈p/2=k/4.

On obtient donc :

$$\frac{a(k)b(k)}{e(k)} \approx \frac{k}{(Log(k))^2}$$

D'où :

$$p(a(k),b(k),e(k)) = \exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k)))$$

Et donc on a obtenu la loi numérique aléatoire, k étant un naturel pair supérieur à 10000 :
H(P(k)) : « t(P(k)) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(k)) avec :

$$p(Xt(P(k))=1) = 1 - p(a(k),b(k),e(k)) = 1 - \exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k)))$$ »

On calcule que prenant k =10000, cette probabilité p(a(k),b(k),e(k)) est de l'ordre de 10^{-52}.

APPLICATION 3.2 :

On considère la proposition P :
P : « Pour tout naturel k supérieur à 10000, k est la somme de 2 nombres premiers (distincts). »
On cherche à modéliser t(P) par une variable aléatoire Xt(P).

Si on applique le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes à H(P(k)), on obtient une loi numérique aléatoire $H_{ind}(P(k))$ identique à H(P(k)) mais dans laquelle les variables aléatoires $X_{ind}t(P(k))$ sont indépendantes.

Pour obtenir des propositions classiques à partir d'une loi numérique aléatoire, on utilise la Propriété de correspondance généralisée suivante, qui complète la définition 2.1a) des relations « est modélisée par » en généralisant la propriété de correspondance définie dans la même définition:

PROPRIETE DE CORRESPONDANCE GENERALISEE 3.2.1 :

A)On a vu dans la Remarque 2.6 (utilisant la propriété de correspondance (Définition 2.1)) que si on avait des modélisations : « Pi est modélisée par l'évènement Evi », Evi évènement d'un Espace probabilisable (Ω,B,p_Ω), alors toute proposition P(P1,..,Pn) utilisant un nombre fini de Pi, de « ou » ,de « et »de « non », était modélisée par l'évènement P(Ev1,..,Evn).
On remarque que dans P(Ev1,..,Evn), on peut remplacer « et » par « ∩ », « ou » par « U », et « non » par « (Ω/) ».
On généralise cette proposition au cas où on a une infinité de modélisations « Pi est modélisée par Evi », i appartenant à un ensemble infini F et les Evi appartenant au même espace probabilisable. Alors, par généralisation de la définition de « est modélisée »:

La proposition $\bigcap_{i\in F} Pi$ est modélisée par l'évènement $\bigcap_{i\in F} Evi$.
On a la même propriété remplaçant l'intersection infinie par une union infinie.

Evidemment, $\bigcap_{i\in F} Pi$ signifie que pour tout i dans F, Pi est vraie, et $\bigcup_{i\in F} Pi$ signifie qu'au moins une proposition Pi est vraie, pour i dans F.

B) Plus généralement, supposons dans B) qu'on ait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F fini « f(k) est modélisée par Xf(k) », les variables aléatoires Xf(k) étant définies sur le même espace probabilisable fini (Ω,*B*,p) et pour tout k f(k) prenant un nombre fini de valeurs dans un ensemble fini noté F(k).
Supposons que les naturels 1,…,n appartiennent à F et qu'on ait une proposition P(f(1),…,f(n)) dont la vérité dépende seulement des valeurs prises par f(1),..,f(n), c'est-à-dire que P(f(1),..,f(n))est vraie ou(exclusif) fausse.
Alors P(f(1),..,f(n)) est équivalent à une proposition de la forme :
« « $f(1)=a_{11}$ » et…et « $f(n)=a_{1n}$ » » ou… « $f(1)=a_{k1}$ »et….et « $f(n)=a_{kn}$ » »
Dans cette proposition la valeur des a_{ki} dépendent seulement de la proposition P(f(1),..,f(n)).
Appliquant la Propriété de correspondance (Définition 2.1) ou la Remarque 2.6, on obtient que P(f(1),..,f(n)) est modélisée par l'évènement P(Xf(1),…,Xf(n)) de(Ω,*B*,p).

C)Ce qui précède est vrai pour F fini, mais comme en A), on généralise cette Propriété avec une F infini:
Supposons qu'on ait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini « f(k) est modélisée par Xf(k) », les variables aléatoires Xf(k) étant définies sur le même espace probabilisable infini (Ω,*B*,p) et pour tout k f(k) prenant un nombre fini de valeurs dans un ensemble fini noté F(k).
Si on a une proposition $P((f(i)_F)$ dont la vérité dépende seulement de $(f(i))_F$, c'est-à-dire $P(f(i))_F)$ est vraie ou(exclusif) fausse, alors on admettra, en généralisant la propriété précédente établie pour F fini, et donc en généralisant la propriété de correspondance, que $P(f(i)_F)$ est modélisée par l'évènement $P(Xf(i)_F)$ de (Ω,*B*,p).

On appellera *Propriété de correspondance généralisée* la Propriété précédente, de laquelle on peut obtenir le A) :

Avec les hypothèses du A), on définit la fonction f de F dans {0,1} telle que pour tout i dans F, « f(1)=1 » est équivalent à « Pi est vraie ». Pour tout i dans F on définit aussi la variable aléatoire Xf(i) à valeur dans {0,1} telle que « Xf(i)=1 » est équivalent à « Evi ». Alors on considère les propositions :

« Pour tout i de F, f(i)=1 » et « Il existe i dans F, tel que f(i)=1 ».

D'après la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 précédente, i étant toujours un nombre pair, la proposition $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "t(P(i))=1"$ est modélisée par $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "X_{ind}t(P(i))=1"$. (On rappelle « t(P(i))=1 » est équivalent à « P(i) est vraie »)
La proposition précédente étant équivalente à P et les variables X_{ind}t(P(i)) étant indépendantes, on a donc obtenu la loi numérique aléatoire H(P) :
H(P) : « t(P) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P) avec :

$$p(Xt(P)=1)=\lim_{k\to\infty}\prod_{i=10000}^{k}(1-\exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k))))$$ »

En exprimant l'expression précédente en somme de logarithmes et en utilisant Log(1+ε(x))≈ε(x), remarquant qu'on a des termes positifs et décroissant on peut approximer l'expression précédente par une intégrale. On obtient alors qu'elle est de l'ordre ou inférieure à 10^{-39}.

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :
H(P) : « t(P) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P) avec :
p(Xt(P)=1) supérieur ou de l'ordre de $1\text{-}10^{-39}$ »
En utilisant alors le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact, on obtient t(P)=1, c'est-à-dire P qui est exactement la Conjecture de Goldbach. On rappelle que la Conjecture de Goldbach est une proposition illustrée et en accord avec tous les tests réalisés. Puisque P n'a jamais été contredite ni prouvée classiquement, on obtient donc que P a une explication aléatoire. (Déf 2.10)

On a donc montré :

a)La conjecture de Goldbach a une explication théorique basée sur le hasard.

b)Elle peut en effet être déduite de modèles statistiques complètement déterminés et dont on connaît l'origine de la validité (Les pseudo-Axiomes utilisés).

c)Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la Conjecture de Goldbach n'a jamais été prouvée classiquement, il est donc très possible qu'elle soit seulement la conséquence du hasard et n'ait donc pas de preuve classique.

Donner une explication aléatoire à la Conjecture faible de Goldbach était l'objectif principal de cet article. Dans ce qui suit, on va donner une pseudo-preuve aléatoire (Définition 2.10) à d'autres propositions liées à la Conjecture de Goldbach, notamment des propositions générales prévoyant que la Comète de Goldbach est une Comète et donnant la définition mathématique des courbes constituant cette Comète. On verra que ces propositions, en dépit du fait qu'elles semblent illustrées par la Comète de Goldbach sont fausses, car elles sont contredites par la Conjecture Forte de Goldbach proposée par Hardy et Littlewood. Cependant, en affinant le modèle statistique permettant d'obtenir les propriétés générales de la Comète de Goldbach on obtiendra dans un 2ième article [(7)] des propositions beaucoup plus précises et illustrées par des tests statistiques, comme la Conjecture forte de Goldbach et celle des nombres premiers jumeaux proposées par Hardy et Littlewood [(6)]. De plus, les 2 applications suivantes montrent comment utiliser la T.A.N pour obtenir d'autres types de propositions classiques ou de lois numériques aléatoires.

APPLICATION 3.3.

Nous allons maintenant obtenir des lois numériques aléatoires permettant de prédire certaines propriétés générales de la Comète de Goldbach.
On rappelle que r(k) est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.
On conservera les notations des 2 applications précédentes. Soit k un naturel pair et h un naturel inférieur à inf(a(k),b(k)).
Considérons la proposition:
Pr(k)(h) : « r(k)=h ».
Si on définit l'ensemble C(k)(h) par :
C(k)(h) = {(A_k,B_k) / (A_k,B_k) appartiennent à Ω(k) et A_k et B_k ont h éléments en commun}.
(Si on avait pris Ω(k) l'ensemble des couples (A_k,B(k)), C(k)(h) aurait lui aussi contenu des couples (A_k,B(k)), mais on vérifie aisément que les 2 choix de Ω(k) conduisent aux mêmes résultats.)
Alors il est clair que Pr(k)(h) s'écrit :
Pr(k)(h) : « (A(k),B(k)) appartient à C(k)(h) ».

Si alors on considère que le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour ((A(k),B(k)),C(k)(h),Ω(k)), alors on obtient :
Pr(k)(h) est modélisée par l'évènement C(k)(h) de l'espace équiprobable Ω(k).
Ce qui s'exprime aussi par la loi numérique aléatoire :
HPr(k) : La fonction r(k) est modélisée par la variable aléatoire Xr(k) avec :
p(Xr(k)=h)=$p_{eq\Omega(k)}$ (C(k)(h)) »
Xr(k) est la variable aléatoire définie sur l'espace (Ω(k), *P*(Ω(k)),$p_{eq\Omega(k)}$) telle que pour tout (A_k,B_k) élément de Ω(k), Xr(k)((A_k,B_k))=Card($A_k \cap B_k$).

On obtient facilement en utilisant les formules de dénombrement :

$$Card(C(k)(h)) = C_{e(k)}^{a(k)} C_{a(k)}^{h} C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}$$

Donc :

$$p_{eq\Omega(i)}(C(k)(h)) = \frac{C_{a(k)}^{h} C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}}{C_{e(k)}^{b(k)}}$$

En appliquant le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes, on obtient une loi d'expression identique avec HPr(k), notée Hr_{ind}, mais dans lesquelles les variables aléatoires $Xr_{ind}(k)$ sont indépendantes.

Hr_{ind} : « Pour k naturel pair supérieur à 1000, r(k) est modélisé par la variable aléatoire $Xr_{ind}(k)$, où les $Xr_{ind}(k)$ sont des variables aléatoires indépendantes (Sur un Univers infini) ayant les mêmes propriétés numériques que les Xr(k). »

On cherche à obtenir par la TAN une estimation de r(k).
Définissant m(k) par m(k)=E($Xr_{ind}(k)$), on admet, ce qui est un problème classique de probabilité :

$$p(\frac{\lim}{k \to \infty}(\frac{Xr_{ind}(k)}{m(k)}) = 1) = 1$$

Et donc, utilisant la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 et le pseudo-Axiome du modèle exact 2.3, on obtient que la proposition suivante P1(r(k)) a une pseudo-preuve aléatoire:

P1(r(k)) : $\frac{\lim}{k \to \infty}(\frac{r(k)}{m(k)}) = 1$

(Dans le cas très improbable où l'évènement « P1($Xr_{ind}(k)$) » ne serait pas de probabilité 1, on le remplacerait par un évènement « P2($Xr_{ind}(k)$) » de probabilité 1 et exprimant la proximité de $Xr_{ind}(k)$) avec m(k), mais de façon moins « forte » que « P1($Xr_{ind}(k)$) ».)

On obtient d'après la théorie des probabilités par récurrence m(k)=a(k)b(k)/e(k), a(k), b(k) et e(k) ayant été précédemment définis.

Pour montrer ceci, on montre facilement le Théorème suivant :

Si E est un ensemble ayant n éléments, a et b étant 2 naturels inférieurs à n, si on considère $E_{a,b}$ l'ensemble des couples (A,B) de sous-ensembles de E ayant respectivement a et b éléments, alors considérant l'Espace probabilisable équiprobable ($E_{a,b}$,$\mathcal{P}(E_{a,b})$, p_{eq}), si $X_{a,b}$ est la variable aléatoire définie sur l'espace probabilisable précédent telle que $X_{a,b}((A,B))=Card(A\cap B)$, alors $E(X_{a,b})=ab/n$.

Pour montrer ceci, on procède comme suit :

On considère un ensemble E ayant n éléments, et E_b l'ensemble des sous-ensembles de E ayant b éléments. On considère alors l'Espace probabilisable équiprobable (E_b,$\mathcal{P}(E_b)$,p_{eq}). Puis on considère pour tout i un sous-ensemble de E ayant i éléments $A_i=\{a_{10},\ldots,a_{i0}\}$.

On définit alors sur l'espace probabilisable précédent la variable aléatoire X_i définie sur (E_b,$\mathcal{P}(E_b)$,p_{eq}) telle que $X_i(B)=Card\ (A_i\cap B)$.

On montre alors facilement par récurrence :$E(X_i)=ib/n$.

Utilisant ce résultat, on obtient le Théorème précédent.

Et donc:

$$m(k) \approx \frac{k}{(Log(k))^2}$$

On obtient :

m(3000)≈48, m(10000) ≈117, m(50000)≈427, m(60000)≈496, m(75000)≈595, m(90000)≈691, m(100000)≈756.

Examinant la Comète de Goldbach [(2)], on voit que P1(r(k)) n'est pas illustrée par cette dernière, considérée comme des tests statistiques.

Et donc, bien qu'elle ait une pseudo-preuve aléatoire, P1(r(k)) n'a pas d'explication aléatoire car elle n'est pas illustrée par des tests statistiques. Cependant il sera possible dé généraliser l'estimation précédente de r(k) en utilisant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable, remplaçant B(k) et E(k) par des ensembles définis dans un second article en fonction des nombres premiers diviseurs de k, et d'obtenir une explication aléatoire d'une variante de la conjecture forte de Goldbach.

On montre le Théorème suivant :

THEOREME 3.3.2 :

Si $f_1(k_1),\ldots.f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis $If_1,..,If_n$ et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_1(k_1),\ldots,Xf_n(k_n)$ définies sur le même espace probabilisable ($k_1,..,k_n$ étant des naturels quelconques, et $f_1,\ldots,f_n$ des fonctions. $Xf_i(k_i)$ est donc à valeurs dans If_i) , alors pour toute fonction $F(f_1(k_1),\ldots,f_n(k_n))$ à valeur dans $\{h_1,\ldots,h_m\}$, et pour tout l dans {1,…m} :

« $F(f_1(k_1),..,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisée par l'évènement « $F(Xf_1(k_1),\ldots,Xf_n(k_n))=h_l$ ».

Démonstration :

D'après l'hypothèse, les $f_i(k_i)$ prennent un nombre fini de valeurs dans l'ensemble fini If_i:

Donc l'équation :« $F(x_1,\ldots,x_n)=h_l$ pour x_i appartient à If_i » admet un nombre fini de solutions. Soit s ce nombre.

On peut donc écrire ces solutions sous la forme :

$(a_{11},\ldots,a_{1n}),\ \ldots,(a_{s1},\ldots,a_{sn})$.

Alors on a : « $F(f_1(k_1),\ldots,f_n(k_n))=h_l$ » est équivalent à la proposition:

« « $f_1(k_1)=a_{11}$ et… et $f_n(k_n)=a_{1n}$ »ou….,ou « $f_1(k_1)=a_{s1}$ et et $f_n(k_n)=a_{sn}$ » ».

Alors en utilisant la Remarque 2.6 et que « $f_i(k_i)=a_{ji}$ » est modélisée par « $Xf_i(k_i)=a_{ji}$, on obtient :

« $F(f_l(k_1),\ldots,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisé par l'évènement :
« $Xf_l(k_1)=a_{11}$ et et $Xf_n(k_n)=a_{1n}$ » ou,….ou « $Xf_1(k_1)=a_{s1}$ et et $Xf_n(k_n)=a_{sn}$ »
Or il est clair que cet évènement est équivalent à :
« $F(Xf_l(k_1),\ldots,Xf_n(k_n))=h_l$. » (puisque les variables aléatoires $Xf_i(k_i)$ sont à valeurs dans If_i).
On a donc montré :
« $F(f_l(k_1),\ldots,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisée par « $F(Xf_1(k_1),\ldots,Xf_n(k_n))=h_l$ ».

Ceci étant vrai pour tout h_l dans $\{h_1,\ldots,h_m\}$, on a donc le corollaire immédiat :

COROLLAIRE 3.3.3 :

Si $f_l(k_1),\ldots,f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_l(k_1),\ldots,Xf_n(k_n)$ définies dans le même espace probabilisable, alors toute fonction $F(f_l(k_1),\ldots f_n(k_n))$ est modélisée par la variable aléatoire : $F(Xf_l(k_1),\ldots,Xf_n(k_n))$.

4.CONCLUSION

On a donc présenté une théorie aléatoire des nombres (T.A.N), basée sur des nouvelles Définitions et pseudo-Axiomes introduisant les lois du hasard dans la Théorie des nombres, qui apparaît comme étant fondamentale pour proposer une solution à des problèmes qui n'ont jamais été résolus comme par exemple la Conjecture faible de Goldbach. On a vu que la T.A.N était basée sur l'Axiome du Hasard, cette Axiome du Hasard entraînant la nécessité d'une nouvelle logique, logique du hasard constituée par les pseudo-Axiomes.

On peut penser avec quasi certitude que de nombreuses propositions vraies en théorie des nombres n'ont pas d'autres explications théoriques qu' une explication théorique aléatoire, c'est-à-dire basée sur le hasard. La T.A.N peut être considérée comme la théorie permettant l'étude de ces propositions. On peut s'attendre qu'on ne puisse pas montrer qu'une proposition en théorie des nombres ait une *démonstration* basée sur le hasard d'une part car cela n'a jamais été fait pour aucune proposition et d'autre part parce que les Axiomes classiques de la Théorie des nombres n'introduisent pas le hasard contrairement aux pseudo-Axiomes de la T.A.N.
Le fait qu'une proposition ait une explication aléatoire est fondamental car cela signifie :

a)Qu'on a montré qu'elle a une justification théorique basée sur le hasard.
b)Qu'on a déterminé précisément les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence et l'origine de la validité de ces modèles.
c)Que cette explication est fondamentale puisque la proposition n'a pas de preuve classique, et qu'il est tout à fait possible que celle-ci n'existe pas si la seule origine de la validité de la proposition est le hasard et ses lois concernant les nombres.

On a donc vu que les pseudo Axiomes étaient fondamentaux en T.A.N, puisqu'ils introduisaient des modèles statistiques. Le fait qu'ils ne soient pas toujours valides est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides ou invalides dans des situations totalement analogues.

En fait, il semble exclu qu'une théorie du hasard en Théorie des nombres existe sans contenir des pseudo-Axiomes et Axiomes analogues à ceux que nous avons présentés dans cet article. Nous avons proposé dans cet article l'application de la T.A.N à la Conjecture faible de Goldbach parce que c'est l'application simple la plus intéressante, mais il existe des applications beaucoup plus simples et évidentes.

Par exemple on obtient facilement en utilisant les Axiomes et pseudo-Axiomes présentés dans cet article les propriétés statistiques des décimales de nombreux réels (pi..). Ces exemples sont les plus simples et évidentes applications de la T.A.N, et constituent la plus évidente preuve de sa validité et de son importance, et en particulier de la validité du pseudo-Axiome du modèle équiprobable présenté dans cet article. On obtient dans ces exemples des modèles statistiques exacts (Déf.2.1), et donc des lois numériques aléatoires exactes, et des explications théoriques aléatoires à de nombreuses propositions exprimant les propriétés statistiques des décimales de réels.

Comme toutes les propositions ayant une explication aléatoire, si on arrivait à prouver classiquement la Conjecture faible de Goldbach ou les propriétés générales de la Comète de Goldbach exposées dans la Conjecture Forte de Goldbach , alors leur explication théorique basée sur la T.A.N perdrait son intérêt. Cependant, cela fait plus de 2 siècles qu'on essaie sans succès de les démontrer, alors qu'on a déjà montré (par Vinogradov) toutes les formules analogues prouvant que tout nombre pair est la somme de 2n nombres premiers, avec n supérieur à 2, et une explication serait que la Conjecture faible et forte de Goldbach aient une origine purement due au hasard, sans preuve classique.

En fait, il est certain qu'il existe d'autres pseudo-Axiomes aléatoires que ceux présentés dans cet article, mais ils doivent nécessairement avoir un caractère d'évidence et de simplicité. Nous verrons dans un second article [(7)] qu'il est possible d'obtenir par la TAN la Conjecture Forte de Goldbach, c'est-à-dire une estimation de r(k) très proche de la Conjecture de Hardy et Littlewood [(6)]. Ceci est cependant plus complexe que l'obtention de la Conjecture faible de Goldbach(r(k)>0 pour tout k pair). Nous verrons aussi dans ce second article qu'il est possible d'obtenir la Conjecture Forte des nombres premiers jumeaux qui est exactement celle proposée par Hardy et Littlewood. C'est aussi un très grand succès de la TAN.

References :

1.E.J Borowski, J.M Borwein,Mathematics, *Collins Dictionnary* (GB 1984).
2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Belin (Paris 2000)
3.M.R Spiegel, J.S Schiller, R.Srinivasan, *Probability and Statistics*, McGraw Hill (2000)
4. P.Roger, *Probabilités statistiques et processus stochastiques*, Pearson (France 2004).
5.O.Rioul ,*Théorie des probabilités*, Lavoisier, (Paris 2008).
6.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta mathematica (1923).
7.Thierry Delort, Théorie aléatoire des nombres, Partie II, *Théories d'or 8e édition*, Books on demand, Paris (2015)

Titre : THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES- PARTIE II : CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.
Auteur :Thierry DELORT
Date : Septembre 2019
Extrait du livre :Théories d'or 10e édition, Thierry DELORT, Editions Books on Demand, Paris (2020)

Résumé :
Dans un premier article [(5)] (Théorie aléatoire des nombres- Partie I : Conjecture de Goldbach), nous avons présenté les bases d'une théorie aléatoire des nombres, permettant de donner une explication basée sur le hasard à de nombreuses propositions qui semblent vraies mais n'ont pas de preuve classique. Nous avons appelé *explications aléatoires* de telles explications rationnelles basées sur le hasard. C'était en particulier le cas pour la Conjecture faible de Goldbach, et pour des propositions décrivant l'aspect général de la Comète de Goldbach.
Dans cet article, nous développons la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN), et il apparaît qu'elle donne aussi des explications aléatoires à des propositions concernant les décimales d'irrationnels ou concernant un certain type des sous-ensembles infinis de **N**, les *ensembles estimés*, qui sont des ensembles dont on a une estimation du nombre d'éléments inférieurs à n.
Nous donnons aussi des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

1.INTRODUCTION

Dans un premier article [(5)] (Théorie aléatoire des nombres- Partie I :Conjecture faible de Goldbach), on a présenté une Théorie Aléatoire des Nombres permettant de donner des explications théoriques mathématiques basées sur le hasard à de nombreuses propositions qui n'ont pas de démonstration dans la Théorie des nombres classiques. On a défini complètement ces explications théoriques mathématiques basées sur le hasard qu'on a appelées *explications aléatoires*. On a vu en particulier que tel était le cas pour la Conjecture faible de Goldbach.

On rappelle que la T.A.N est basée sur l'Axiome du Hasard exprimant l'existence de modèles statistiques non-certains (c'est-à-dire non démontrable classiquement) exprimant des propriétés des nombres. On a vu que cet Axiome entraînait la nécessité d'introduire une nouvelle logique du hasard utilisant des pseudo-Axiomes aléatoires, qui sont des propositions particulières propres à la TAN, définies dans le premier article [(5)], exprimant notamment la validité de modèles statistiques dans certains cas. Ces pseudo-Axiomes aléatoires sont analogues à des Axiomes classiques. Leur particularité est qu'ils ne sont pas toujours valides : Les modèles statistiques qu'ils permettent d'obtenir peuvent être valides dans un cas et invalides dans un cas complètement analogue. Cependant, tout comme les Axiomes classiques, ils sont simples et on peut les justifier par des arguments intuitifs évidents. Tout comme les Axiomes classique, ils n'ont cependant pas de démonstration.

Dans cet article, on présente de nouvelles applications de la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN).
La première application présentée dans ce 2ième article est aussi la plus simple de la TAN . Elle permet d'étudier les propriétés des décimales de nombreux irrationnels. Là encore non seulement on montre que des propositions prévoyant qu'elles ont un nombre infini de répétitions de chiffres ont des explications aléatoires, mais que c'est aussi le cas pour des propositions prévoyant la fréquence d'apparition de ces répétitions de chiffres. Là encore ces *explications aléatoires* (c'est-à-dire donc basées sur le hasard) sont fondamentales puisque ces propositions n'ont pas de démonstration classique.

La deuxième application présentée dans ce 2ième article permet l'étude des *ensembles estimés* c'est-à-dire des sous-ensembles infinis de **N** dont on a une estimation de leur nombre d'éléments inférieurs à n pour n tendant vers l'infini.

Comme troisième applications de la T.A.N, on a donné une explication aléatoire à la Conjecture Forte de Goldbach, donnant une expression de r(k), nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.

$$r(n) \cong \Pi_2 \left(\prod_{p/n, p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{n}{\ln(n)^2} \quad \text{où } \Pi_2 \approx 0{,}66016$$

Cette expression diffère d'un facteur 2 de l'expression proposée par Hardy et Littlewood (7) mais elle est en bien meilleur accord avec la Comète de Godbach obtenue par ordinateur.

On donnera aussi une explication aléatoire à la Conjecture Forte des Nombres Premiers jumeaux qui est exactement l'expression proposée par Hardy et Littlewood.

2.THEORIE (RAPPELS)

A)RAPPELS THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES

On a vu [5] que la TAN permettait d'étudier le hasard dans la Théorie des nombres. Elle était basée sur des *pseudo-Axiomes aléatoires* qui sont des propositions simples introduisant le hasard sous la forme de modèles statistiques, mais qui contrairement aux Axiomes ne sont pas toujours valides. Ceci est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides dans un cas et non valides dans d'autres cas complètement analogues.

On a dans le premier article [5] défini le concept qu'une proposition P *est modélisée* par un évènement Ev. Dans cette définition, on avait la *propriété de correspondance*. Cette propriété fondamentale exprimait que si on avait une proposition P1 modélisée par un évènement Ev1, et qu'une autre proposition P2 était modélisée par un évènement Ev2, alors on avait Non(P1) était modélisée par l'évènement Ev1, et si Ev1 et Ev2 appartenaient au même espace probabilisable, la proposition « P1 et P2 » était modélisée par l'évènement « Ev1 et Ev2 », et la proposition « P1 ou P2 » était modélisée par l'évènement « Ev1 ou Ev2 ».

Nous avons généralisé cette propriété au cas où on avait une infinité de propositions Pi, i appartenant à un sous-ensemble E de **N**, modélisées par des évènements Evi appartenant au même espace probabilisable, d'Univers infini. Alors la propriété de correspondance généralisée exprimait que la proposition $\cap(Pi)_E$ (qui était par définition équivalente à la proposition « Pour tout i dans E, Pi est vraie ») était modélisée par l'évènement $\cap(Evi)_E$. Et une propriété analogue pour l'union.

Ainsi dans la TAN, le concept « est modélisée par » permet de représenter de façon plus ou moins complète les propriétés statistiques de propositions.

Un deuxième concept fondamental de la TAN était celui de propositions particulières appelées *lois numériques aléatoires*.

DEFINITION 2.A.1 :

Si f(k) est une fonction d' un sous-ensemble F de **N** dans **N**, on appelle *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :
« f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) »
Par Définition, cela signifie que pour tout k dans F, f(k) est à valeur dans un sous-ensemble fini F(k) de **R**, que Xf(k) est une variable aléatoire aussi à valeur dans F(k), et que pour tout i_k dans F(k), la proposition « $f(k)=i_k$ » est modélisée par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».

On a généralisé aussi la propriété de correspondance dans le cas où on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini, et que toutes les variables aléatoires étaient définies sur le même espace probabilisable. Cette propriété de correspondance généralisée exprime qu' avec les hypothèses précédentes, si on a une proposition $P((f(k))_F)$ dont la validité dépend seulement de la suite $(f(k))_F$, (C'est-à-dire que pour tout $(f(k))_F$, $P((f(k))_F$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie) alors la proposition $P(f(k)_F)$ est modélisée par l'évènement $P((Xf(k))_F)$, lorsque $P(Xf(k))_F)$ est un évènement. On avait montré ceci lorsque F était fini, en utilisant la propriété de correspondance, et on l'avait généralisé dans le cas où F était infini.

On a un pseudo-Axiome aléatoire fondamental, la *pseudo-Axiome du modèle exact*, qu'on utilise toujours pour obtenir qu'une proposition classique a une explication aléatoire :

PSEUDO-AXIOME 2.A.2 (du modèle exact):

Si P est une proposition classique et si on a la loi numérique aléatoire sur un ensemble F={1} :
« t(P)(1) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P)(1) »

(t(P) étant classiquement la fonction vérité de P, à valeurs dans {0,1}), et qu'on a de plus $p(Xt(P)(1)=1)\approx 1$, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle exact est valide pour cette loi numérique aléatoire précédente, on a t(P)=1. (Et donc P est vraie).

Dans le précédent article [(5)], les modèles statistiques étaient basées sur des espace probabilisables équiprobables. On a utilisé de tels modèles pour donner des explications aléatoires à la Conjecture de Goldbach ou à des propositions décrivant les propriétés de la Comète de Goldbach. Ces modèles étaient obtenus par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable suivant :

PSEUDO-AXIOME 2.A.3 (du modèle équiprobable) :

Si on a une proposition P_k : « x_k est élément de A_k », A_k étant un ensemble fini dont on connaît le nombre d'éléments, sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k dont on connaît aussi le nombre d'éléments, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k), la proposition P_k : « x_k est élément de A_k » est modélisée par l'évènement Ev_k :« $x_{(k)}$ est élément de A_k » de l'espace probabilisable équiprobable $(\Omega_k,\mathcal{P}(\Omega_k), p_{eq\Omega k})$, qu'on appellera plus simplement espace équiprobable Ω_k.
La probabilité dans cet espace de Ev_k est donc égale à $Card(A_k)/Card(\Omega_k)$.

En fait le pseudo-Axiome du modèle équiprobable précédent, ainsi comme on le verra les pseudo-Axiomes donnant un modèle statistique aux ensembles estimés, permettent d'obtenir des lois numériques aléatoires, mais dans lesquelles les variables aléatoires ne sont pas définies sur le même espace probabilisable. Or la seule possibilité d'obtenir des résultats intéressants est que ces variables aléatoires non seulement soient définies sur le même espace probabilisable mais aussi soient indépendantes.
On doit donc utiliser un pseudo-Axiome permettant d'obtenir que ces variables aléatoires sont indépendantes, le *pseudo-Axiome des variables indépendantes* ce qui est possible car on a vu que l'application d'un pseudo-Axiome aléatoire n'est pas toujours valide, contrairement à un Axiome, puisque les modèles statistiques qu'il introduit ne sont pas toujours valides.

PSEUDO-AXIOME 2.A.4 (des variables indépendantes) :

Si on a une loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par Xf(k) », alors lorsque le pseudo-Axiome des variables aléatoires est valide pour cette loi, on obtient la loi précédente dans laquelle les variables aléatoires Xf(k) sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes.

Si une proposition admet une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication rationnelle basée sur le hasard obtenue par la TAN, cette explication est différente d'une preuve classique basée sur les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres. En effet, elle est basée sur l'existence de certains modèles statistiques, obtenus par des pseudo-Axiomes, qui ne sont pas toujours valides. On définit donc de la façon suivante *une explication aléatoire* :

DEFINITION 2.A.5 :

a) On appelle *pseudo-preuve aléatoire* d'une loi numérique aléatoire ou d'une proposition classique son obtention utilisant certains pseudo-Axiomes de la TAN ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.

b) On dira qu'une proposition classique a une *explication aléatoire* si elle a une pseudo-preuve aléatoire et que celle-ci est très intéressante, puisqu'elle répond aux critères suivants :
-On n'a jamais pu la démontrer ni sa négation.
-Elle est illustrée par des tests .

-Si des propositions contradictoires P1,..,Pn ont des pseudo-preuves aléatoires, une seule d'entre elles, celle la mieux illustrée par les tests, pourra avoir une explication aléatoire. Si les tests ne peuvent départager, on choisira celle obtenue par le modèle statistique le plus précis.

Les définitions données précédemment n'ont pas la même nature : Si on peut considérer que a) donne une définition mathématique d'une *pseudo-preuve aléatoire*, cela n'est pas le cas de la définition d'une *explication aléatoire* donnée en b). En effet, on utilise l'expression « proposition ayant une explication aléatoire » pour désigner une proposition ayant une pseudo-preuve aléatoire celle-ci étant très intéressante, car elle répond à certains critères. Et donc *explication aléatoire* n'a pas de définition mathématique formelle, contrairement à *pseudo-preuve aléatoire.*

Comme on l'a vu dans l'article [5], c'est pour les propositions illustrées par de nombreux tests (résultats obtenus par des nombres finis d'opérations, éventuellement par un ordinateur) qu'il est le plus intéressant d'obtenir une explication aléatoire. Ceci était notamment le cas pour la Conjecture faible de Goldbach.

B.RAPPELS :THEORIE DES PROBABILITES

On rappelle les éléments basiques mais fondamentaux de la théorie des probabilités :

THEOREME 2.B.1 :

Si $X_1,\ldots,X_n$ sont n variables aléatoires :

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

THEOREME 2.B.2 :
Si $X_1,..,X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes , $v(X_i)$ étant la variance de X_i:

$$v(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} v(X_i)$$

DEFINITION 2.B.3 :

Si X est une variable aléatoire avec les 2 évènements « X=1 » et « X=0 » alors X est une loi binomiale.

THEOREME 2.B.4 :

Si X est une loi binomiale de loi p (p(X=1)=p), alors :
E(X)=p et v(X)=p(1-p)

DEFINITION 2.B.5 :

Si$(X_i)_{\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires définie sur un espace probabilisable (Ω,B,p), alors la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ *converge en probabilité* vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n \geq N(\varepsilon,\delta), p("|X_i - a| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

DEFINITION 2.B.6 :

Si $(X_i)_{\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisable (Ω,B,p), la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers a si « $\lim_{n\to\infty} X_i = a$ » est un évènement de la tribu B de probabilité égale à 1.
On écrira aussi ceci :

$$p("\lim_{n\to\infty} X_i = a") = 1$$

Il est aussi intéressant d'introduire la notion de convergence absolue en probabilité.

DEFINITION 2.B.7 :

$(X_i)_{\mathbf{N}}$ étant une suite de variable aléatoire, la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge *absolument en probabilité* vers a (a réel) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n \geq N(\varepsilon,\delta), p(\bigcap_{i=N(\varepsilon,\delta)}^{n} "|X_i - a| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

On a évidemment que si la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers a, alors elle converge en probabilité vers a. On montre de plus le Théorème :

THEOREME 2.B.8 :

Si la suite de variables aléatoires $(Y_i)_{\mathbf{N}}$ définie sur un espace probabilisable (Ω,B,p) converge absolument en probabilité vers a, alors elle converge presque sûrement vers a.

(On donne la démonstration de ce Théorème à car il pourrait permettre de démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée que nous définirons plus loin).
Démonstration :
On suppose a=1 (si a≠1 on considère Y_i/a).
D'après la définition de la convergence absolue en probabilité :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n > N(\varepsilon,\delta), p(\bigcap_{N(\varepsilon,\delta)}^{n} "|Y_i - 1| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

On veut prouver:

$$p("\lim_{n\to\infty} Y_n = 1") = 1$$

où « $\lim_{n\to\infty} Y_n = 1$ » représente l'évènement de Ω pour lequel la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ tend vers 1.
Soit δ >0, on définit la suite de naturels N_k par, pour k dans N*:
$N_k=N(1/k,\delta)$.
Ceci signifie:

$$\forall n \geq N_k, p(\bigcap_{i=Nk}^{n} "|Y_i - 1| \leq 1/k") \geq 1-\delta$$

On définit alors les évènements E_k par :
E_k: « $\exists M_k / \forall n \geq M_k, |Y_n - 1| \leq 1/k$ »

Si on considère l'évènement: $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$
Il est évident que :

$$"\lim_{n\to\infty} Y_n = 1" \subset "(Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k" \text{ et } "(Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k" \subset "\lim_{n\to\infty} Y_n = 1"$$

Donc les 2 évènements précédents sont identiques.
De plus la suite d'évènements E_k est décroissante donc :

$$p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{p\to\infty} p(E_p)$$

De plus, il est évident que:

$$\bigcap_{i=Np}^{\infty} "|Y_i - 1| \leq 1/p" \subset E_p$$

Et donc:

$$p(E_p) \geq p(\bigcap_{i=Np}^{\infty} "|Y_i - 1| \leq 1/p") = \lim_{n\to\infty} p(\bigcap_{i=Np}^{n} "|Y_i - 1| \leq 1/p") \geq 1 - \delta$$

Et donc:

$$p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{p\to\infty} p(E_p) \geq 1 - \delta$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta>0$:

$$p("\lim_{n\to\infty} Y_n = 1") = p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$$

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres et la Loi Forte des Grands Nombres:

Loi Faible des Grands nombres 2.B.9:

Si on a une suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors la suite $Y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{n}$ converge simplement vers $\mu=E(X_i)$.(Si μ est fini).

Loi Forte des Grands Nombres 2.B.10 :

Avec les hypothèses et les notations précédentes, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers μ.

On a vu que la convergence absolue en probabilité entraînait la convergence presque sûre. Il est donc intéressant de considérer la Loi Forte des Grands Nombres 2ième forme :

Loi Forte de Grands Nombres 2ième forme 2.B.11:
Avec les hypothèses et notations précédentes la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers μ.

On utilisera aussi l'Inégalité de Chebyshev :

THEOREME 2.B.12 :

Si Y est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2, si ε est un réel strictement positif :

$$p("|Y - \mu| \geq \varepsilon") \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

On rappelle aussi le résultat utilisé dans l'article (5) :

THEOREME 2.B.13 :

Si E est un ensemble à n éléments, E(a) et E(b) étant les ensembles des sous-ensembles de E ayant a et b éléments, si X_I est la variable aléatoire définie sur l'espace équiprobable E(a)×E(b) donnant le nombre d'éléments communs de A et B pour (A,B) dans E(a)×E(b), on a alors :

$$E(X_I) = \frac{ab}{n}$$

3.DECIMALES D'IRRATIONNELS

La TAN permet d'obtenir très simplement de nombreux résultats sur les décimales d'irrationnels dont on peut vérifier la validité en utilisant des ordinateurs mais qui n'ont jamais été prouvés classiquement. Nous allons en proposer 2 exemples :

EXEMPLE 3.1

Montrons comme premier exemple que la proposition :
P :« √3 a dans ses décimales une infinité de fois le nombre 5 » a une pseudo-preuve aléatoire, c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir en utilisant les pseudo-Axiomes de la TAN. Cette pseudo-preuve est intéressante, car on n'a jamais montré classiquement cette proposition, mais cette proposition n'a pas d'explication aléatoire, car elle n'est pas illustrée par des tests. La méthode suivante est générale, on aurait pu remplacer √3 par π, √2, Log(5) …et 5 par n'importe quel autre chiffre.

La proposition P admet la pseudo-preuve aléatoire suivante :
On note f(i)la fonction donnant la valeur de la $i^{ième}$ décimale de √3 .
On a donc :
f(i) appartient à A_i={0,1,….,9}.

En appliquant le pseudo-Axiome 2.A.3 du modèle équiprobable, on obtient que la proposition « f(i) est élément de {5} » est modélisé par un évènement de probabilité Card({5})/Card(A_i)=1/10.
Si on pose pour tout i dans **N***, g(i)=t(« f(i)=5 »), c'est-à-dire g(i)=1 si f(i)=5, et g(i)=0 sinon, on obtient la loi numérique aléatoire sur **N***:
« g(i) est modélisée par Xg(i) », avec p(« Xg(i)=1 »)=1/10.

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variables indépendantes à la loi numérique aléatoire précédente, on peut alors supposer que les Xg(i) sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes.
i étant un naturel non nul quelconque, on cherche à modéliser par un évènement la proposition :
Pi : « Il existe au moins un naturel k(i) supérieur ou égal à i tel que la $k(i)^{ème}$ décimale soit égale à 5 ».
Il est évident que Pi est équivalente à :
« Il existe k(i) supérieur ou égal à i tel que g(k(i))=1 ».

On définit alors Fi comme étant le sous-ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ (suites comportant seulement des 0 et des 1), ayant au moins un terme égal à 1 après le $i^{ème}$ terme (au sens large).
Alors il est évident que Pi est équivalente à :
« $((g(j))_{\mathbf{N}^*}$ est élément de Fi ».

D'après la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, Pi est donc modélisée par l'évènement Ev(Pi) : « $((Xg(j))_{\mathbf{N}^*}$ est élément de Fi ».
Or il est évident que l'évènement Non(Ev(Pi)) est l'évènement :
Non(Ev(Pi)) : « Pour tout j supérieur ou égal à i, Xg(j)=0 ».

Or comme les Xg(j) sont indépendantes, la probabilité de Non(Ev(Pi)) est égale à :

$$p(Non(Ev(Pi)) = \prod_{j=1}^{\infty} p("Xg(j) = 0") = \prod_{j=1}^{\infty} (9/10) = 0$$

On a donc p(Non(Ev(Pi)))=0 et p(Ev(Pi))=1.

D'autre part il est évident que la proposition P : « Il existe une infinité de décimales égales à 5 dans les décimales de √(3) » est équivalente à :
« Pour tout i dans **N***, Pi est vrai ».
D'après la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, la proposition précédente est modélisée par l'évènement :
« Pour tout i dans **N***, Ev(Pi) »
Or il est évident que pour tout i Ev(Pi+1) entraîne Ev(Pi), c'est-à-dire Ev(Pi+1) est inclus dans Ev(Pi).
On a donc :

$$p(\bigcap_{i=1}^{\infty}(Ev(Pi)) = \lim_{n\to\infty} p(\bigcap_{i=1}^{n} Ev(Pi)) = \lim_{n\to\infty} p(Ev(Pn)) = 1$$

puisqu'on a obtenu p(Ev(Pn))=1 pour tout n.

Donc P est modélisée par un évènement de probabilité 1.
Appliquant alors le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient donc P.
Puisque P n'a jamais été démontrée classiquement (ni sa négation), P a donc une explication aléatoire (Définition 2.A.5).

EXEMPLE 3.2 :

Comme 2[ième] exemple, on peut montrer qu'une autre proposition, beaucoup plus précise que P, et pouvant être illustrée par de nombreux tests, a une pseudo-preuve aléatoire. Elle a donc une explication aléatoire, puisque de plus on ne l'a jamais montré classiquement ni sa négation.

Cette proposition est la proposition Q :

$$Q : \lim_{n\to\infty} \frac{G(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} g(i)}{n} = 1/10$$

Dans cette expression, G(n) indique le nombre de décimales égales à 5, parmi les n premières décimales.
En effet, les Xg(i) étant indépendantes et de même loi, d'après la Loi Forte des Grands Nombres :

$$p("\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Xg(i)}{n} = 1/10") = 1$$

De plus d'après la propriété de correspondance généralisée (rappelée dans RAPPELS TAN 2.A) Q est modélisée par l'évènement de l'expression précédente de probabilité égale à 1.
Donc Q est modélisée par un évènement de probabilité 1, et si on applique le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient Q.
Puisque Q n'a jamais été démontrée classiquement, Q a donc une explication aléatoire.
Q serait illustrée par des tests si on calculait G(n)/n pour plusieurs valeurs de n, et qu'on observait que G(n)/n semble tendre vers 1/10.

La loi numérique aléatoire :
« g(i) est modélisée par Xg(i) »
où les Xg(i) sont indépendantes et définies plus haut, pourrait être un exemple de loi numérique aléatoire exacte. Pour vérifier ceci il faudrait réaliser des tests statistiques.

4.ENSEMBLES ESTIMES

Le but de cette partie est d'étudier par la TAN les propriétés des *ensembles estimés*, c'est à dire des sous-ensembles de **N** dont on connaît une estimation de leur nombre d'éléments inférieurs à n. On verra que comme dans le domaine précédemment exposé de la TAN, la TAN permet de donner des explications aléatoires à de très nombreuses propositions qui n'ont jamais été prouvées classiquement.

4.A THEORIE

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres Généralisée :

Loi Faible des Grands Nombres Généralisée 4.A.1 (LfGN généralisée):
Si on a une suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ de lois binomiales indépendantes avec $p(X_i=1)=p(i)$ et que la série $\Sigma p(i)$ diverge, alors, si on définit la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ de variables aléatoire par :

$Y_n = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} X_i}{\sum_{i=0}^{n} p(i)}$, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 1.

Démonstration :

La démonstration généralise la démonstration de la Loi Faible des Grands Nombres classiques.
On pose $S_n=X_0+\ldots+X_n$
D'après l'hypothèse, X_i est une loi binomiale associée à p(i). En utilisant les rappels 2.B, l'Espérance μ_i et la variance σ_i^2 de X_i sont :
$v(X_i)=\sigma_i^2=p(i)(1-p(i))$ et $\mu_i=p(i)$

$$E(S_n) = \sum_{i=0}^{n} E(X_i) = \sum_{i=0}^{n} p(i)$$

et donc $E(Y_n)=1$.

De plus, les lois X_i étant indépendantes :

$$v(Y_n) = v(\frac{S_n}{E(S_n)}) = \frac{v(S_n)}{(E(S_n))^2} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \sigma_i^2}{(\sum_{i=0}^{n} \mu_i)^2}$$

Si on applique l'inégalité de Chebyshev :

$$p("|Y_n - 1| \geq \varepsilon") \leq \frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

mais on a :

$$\sum_{i=0}^{n} \sigma_i^2 = \sum_{i=0}^{n} p(i)(1-p(i)) \leq \sum_{i=0}^{n} p(i) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i$$

et donc :

$$\frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{n} \mu_i}$$

Mais par hypothèse $\Sigma\mu_i=\Sigma p(i)$ est divergeant, il en résulte que $v(Y_n)/\varepsilon^2$ tend vers 0 pour n tend vers l'infini et donc $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 1.

On admettra que de la même façon, on peut généraliser la Loi Forte des Grands nombres $1^{\text{ière}}$ et $2^{\text{ième}}$ forme pour obtenir les 2 lois :

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2(LFGN généralisée):
Avec les notations et les hypothèses de la Loi Faible des Grands nombres généralisée, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers 1.

REMARQUE 4.A.2.a)

Même si cette loi n'était valable que pour p(i) suite monotone, cela suffirait pour tous les exemples classiques de la TAN des ensembles estimés, notamment tous ceux présentés dans cet article.

En fait, si on a pour n assez grand $\sum_{i=1}^{n} p(i) > an$, a étant une constante strictement positive, la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée (LFGN généralisée) est une conséquence immédiate de la LFGN de Khintchine [(6)], dont on rappelle la formulation :

Si $(X_i)_{\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, X_i étant d'espérance m_i et les variances étant uniformément bornées ($\sigma_i^2<c$ pour tout i), alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i)$ converge presque sûrement vers 0.

Cependant dans le cas général où p(i) tend vers 0, ce qui est le cas dans la plupart des Exemples donnés dans cet article, on ne peut pas généraliser la LFGN de Khintchine pour obtenir la LFGN généralisée.

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée $2^{\text{ième}}$ forme 4.A.3:
Avec les notations et hypothèses précédentes, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers 1.

On rappelle qu'on a prouvé dans le Théorème 2.B.8 que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée $2^{\text{ième}}$ forme entraînait la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée.
Ce qui précède va permettre par la TAN l'étude des ensembles estimés correspondant à la définition suivante :

DEFINITION 4.A.4: (*Ensembles estimés*)

On appelle *ensemble estimé d'estimation* a(n) un sous-ensemble infini A de **N** tel que, si A(n)={i/ i≤n et i appartient à A}, on ait :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Card(A(n))}{a(n)} = 1$$

Soit A un ensemble estimé d'estimation a(n). On cherche à modéliser la fonction caractéristique de A $f_A(i)$, i étant un naturel assez grand, c'est-à-dire supérieur à un naturel N_A. Le plus simple modèle statistique de $f_A(i)$ est celui défini par le *pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés* suivant, que nous allons justifier par des arguments intuitifs.

PSEUDO-AXIOME 4.A.5 (du modèle des ensembles estimés) :

Si A est un ensemble estimé d'estimation a(n) avec a(n) croissante, alors :

a)Lorsque le *pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés* est valide pour $(A,a(n),N_A)$, s'il existe un naturel N_A tel que pour tout i supérieur ou égal à N_A, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par l'évènement « $x_{iA}=1$ » de l'espace probabilisable d'Univers $\Omega_{iA}=\{0,1\}$, avec p(« $x_{iA}=1$ »)=p_{iA}=a(i)-a(i-1).

On verra dans la première justification intuitive de ce pseudo-Axiome aléatoire que pour que le modèle soit meilleur, il faut que pour n supérieur ou égal à 1, a(n) soit une bonne approximation de Card(A(n)) . On pourra donc choisir une valeur de N_A tel que ce soit le cas, par exemple choisir N_A tel que pour n supérieur à N_A, 0,9<Card(A(n))/a(n)<1,1.

On voit donc que dans l'application du pseudo-Axiome précédent, on peut choisir ou non la valeur de N_A.

En fait, on verra qu'en général, notamment dans la 2[ième] justification intuitive, que les propositions obtenues utilisant le modèle statistique de ce pseudo-Axiome ne dépendent que du comportement à l'infini de p_{iA}=a(i)-a(i-1). Il en résulte qu'on peut alors les obtenir en choisissant n'importe quelle valeur de N_A (choisie assez grande, puisqu'on sait que plus N_A est grand meilleur est le modèle). On peut donc restreindre ou non le choix de N_A, dans l'application du pseudo-Axiome précédent pour $(A,a(n),N_A)$.

Choisir une valeur de N_A permet d'obtenir des propositions illustrées par des tests qui ne le seraient pas si N_A était inconnu.

1[ière] justification intuitive :

i étant un naturel assez grand, on sait qu'une estimation du nombre de naturels appartenant à A strictement inférieurs à i est a(i-1), et qu'une estimation du nombre de naturels inférieurs ou égaux à i appartenant à A est a(i). Il s'ensuit qu'on peut approximer la probabilité que i appartienne à A par p_{iA} = a(i)-a(i-1). (Cette approximation est à priori d'autant meilleure que l'estimation a(n) de Card(A(n)) est précise).

Ceci signifie que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée presqu'exactement par un évènement de probabilité p_{iA}. D'après la définition de « est modélisée », on peut donc considérer que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}. Ceci justifie donc intuitivement la validité dans certains cas du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.

2[ième] justification intuitive :

Supposons qu'on ait un sous-ensemble A de **N** dont la fonction caractéristique soit modélisée comme le modèle du a) du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.

C'est-à-dire qu'on ait un naturel N_A et une fonction a(n) croissante telle que pour i supérieur ou égal à N_A, $f_A(i)$ soit modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}=a(i)-a(i-1).

Si on définit la variable aléatoire X_{iA} sur l'espace probabilisable du a) d'Univers Ω_{iA} par : $X_{iA}=x_{iA}$, alors on obtient la loi numérique aléatoire :

« Pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} ».

Si on applique alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes, on obtient la loi précédente avec des X_{iA} variables indépendantes.

Appliquant alors la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2, on obtient :

$$p("\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=NA}^{n} X_{iA}}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}=1")=1$$

Il en résulte que d'après la propriété de correspondance généralisée, la proposition :

$$"\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=NA}^{n} f_A(i)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} = 1"$$, est modélisée par un évènement de probabilité 1.

En appliquant le pseudo-Axiome du modèle exact, on obtient donc que cette proposition est vraie. Or il est évident que cette proposition est équivalente à « A est un ensemble d'estimation a(n) ». (Car dans l' expression numérique précédente, $\Sigma p_{iA}=a(n)-a(N_A-1)$)
On voit donc que le modèle statistique défini dans le pseudo-Axiome a), permet d'obtenir que la proposition « A est un ensemble estimé d'estimation a(n) » a une explication aléatoire.
Il apparaît donc que le modèle statistique proposé est le meilleur modèle statistique pour modéliser un ensemble estimé d'estimation a(n).
On voit dans cet exemple, comme dans la Remarque suivant le pseudo-Axiome, que la proposition obtenue dans la 2ième justification est indépendante du choix de N_A.

Le pseudo-Axiome précédent du modèle des ensembles estimés introduit la Définition suivante :

DEFINITION 4.A.6 (évaluation probabiliste) :

Si A est un sous-ensemble de **N** (fini ou non), tel qu'il existe un naturel N_A tel que l'on ait la loi numérique aléatoire, f_A étant la fonction caractéristique de A :
« Pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} »
Avec $p(X_{iA}=1)=p_{iA}$,
On dira alors que A est un ensemble *d'évaluation probabiliste* p_{iA}, pour i supérieur à N_A.

De plus dans la 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on a établi un résultat fondamental, exprimé dans le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.7:

Si A est un ensemble ayant une évaluation probabiliste p_{iA}, pour i supérieur à N_A, et que Σp_{iA} diverge, alors la proposition :
« A est un ensemble estimé d'estimation $a(n)=\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}$ » a une pseudo-preuve aléatoire.

On a vu que pour obtenir ce Théorème 4.A.7 on utilisait la LFGN généralisée 4.A.2.
Comme on l'a vu cependant la LFGN généralisée 4.A.2 de même que sa variante 4.A.3 ne se démontrent pas aussi facilement que la LFGN (qui n'était déjà pas évidente). Or, en utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 que l'on a démontrée, on peut obtenir aussi une évaluation de la fonction $S(n)=\Sigma_{[NA,n]} f_A(i)$.
En effet, on rappelle l'étude théorique d'une fonction par la TAN, donnée dans l'article [(5)] (Chapître 3.3) :

ETUDE THEORIQUE D'UNE FONCTION PAR LA TAN 4.A.7a)

On ne considèrera que 2 cas :

Dans le premier cas, on obtient par la TAN en utilisant un modèle statistique M1 une fonction F(k), telle que la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire :

P1 : « $\lim_{k\to\infty}(\frac{f(k)}{F(k)})=1$ » .

Dans le 2[ième] cas, on obtient par la TAN, en utilisant un modèle statistique M2 une fonction F(k), deux fonctions $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ positives et tendant vers 0 telle que, posant $I(k)=[1-\varepsilon_1(k),1+\varepsilon_2(k)]$, une proposition du type de la proposition suivante P2 a une pseudo-preuve aléatoire :

P2 : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F(i)}\in I(i)")\geq p$ (En général on ne connaît pas explicitement F(n), mais on a F(n) équivalente à une fonction $F_A(n)$ connue)»

Dans la proposition précédente, p est un rationnel proche de 1 (p=0.98 par exemple). On a supposé que f(k) était définie sur **N**. Dans le cas général f(k) est définie sur un sous-ensemble infini A de **N**, (Par exemple A est l'ensemble des naturels supérieurs à un naturel N_A) et la sommation ne porte que sur les éléments de A. On divise alors par le nombre d'éléments de A inférieurs à n. P2 exprime qu'il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N la proportion des naturels k appartenant à A et inférieurs à n tels que f(k)/F(k) appartiennent à I(k) est supérieure à p.

On voit que les tests statistiques illustrant P1 sont très proches des tests statistiques illustrant P2. Pour voir si P1 ou P2 sont illustrées par des tests, on trace les points (k,f(k)/F(k)) (ou $(k,f(k)/F_A(k))$pour k aussi grand que possible. Si il apparaît que ces points (pour P1), ou un pourcentage proche de 1 de ces points (pour P2) tendent vers la droite d'équation y=1, alors P1 ou P2 sont illustrées par les tests. Dans certains cas, P1 ou P2 tout en étant vraies ne sont pas illustrées par les tests. C'est le cas quand on ne peut pas réaliser les tests (C'est-à-dire calculer f(k)/F(k) ou $f(k)/F_A(k)$) pour k assez grand), à cause de limites comme la puissance maximale des ordinateurs.

Cependant, P1 et P2 ne sont vraies que dans certains cas où les modèles M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2 sont valides avec une très bonne approximation. Un cas beaucoup plus général est le cas où M1 et M2, tout en étant valides avec une bonne approximation, ne le sont pas avec une qualité suffisante pour que les propositions du type P1 ou P2 qu'ils entraînent soient vraies. On remarque que toute proposition Q1 ou Q2 entraînée par P1 ou P2 a une pseudo-preuve aléatoire d'après la Définition 2.10. Cependant, pour que de telles propositions Q1 ou Q2 soient intéressantes, il faut d'une part qu'elles soient illustrées par des tests, mais aussi qu'elles illustrent la validité avec la meilleure qualité possible des modèles statistiques M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2.

Ainsi, dans le premier cas on considèrera que seules les propositions du type Q1 (c'est-à-dire entraînée par P1 et donc ayant une pseudo-preuve aléatoire) sont intéressantes :

Q1 : « Il existe 2 réels strictement positifs α et β et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N, f(n)/F(n) appartienne à $[\alpha,\beta]$ »
C'est une telle proposition qu'on avait obtenue dans le 1[ier] article [(5)] permettant d'obtenir les propriétés générales de la Comète de Goldbach.

Dans le 2[ième] cas on considèrera que seules les propositions du type Q2 (C'est-à-dire entraînée par P2 et ayant une pseudo-preuve aléatoire) suivantes sont intéressantes :

Q2 : « Il existe 2 réels strictement positifs α et β, et il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F_A(i)}\in[\alpha,\beta]")\geq p-0.01$$

On voit que là encore, les tests statistiques illustrant Q1 sont très proches des tests statistiques illustrant Q2. Si on obtient que de telles propositions du type Q1 ou Q2 précédent sont illustrées par

des tests on peut s'attendre à ce qu'en améliorant le modèle statistique permettant de les obtenir, on puisse obtenir des propositions beaucoup plus précises du type P1 ou P2 pour estimer la fonction f(k). Cela sera le cas dans l'étude de la fonction r(k), introduite dans le 1ier article [(5)], donnant le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.

On remarque aussi que si dans P2, on prend p=1, alors on obtient P1. En utilsant cette remarque et un pseudo-Axiome très simple (défini plus loin, pseudo-Axiome « de la limite »), on montrera qu'en général, si P2 a une pseudo-preuve aléatoire alors P1 aussi.

REMARQUE 4.A.7b) :

On suppose donc qu'un ensemble A a une évaluation probabiliste p_{iA} pour i supérieur à N_A, et que Σp_{iA} diverge.

On peut, utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 qu'on a démontrée, obtenir une estimation de la fonction S(n) du type de celles présentées dans la section précédente P2. On rappelle :

$$S(n)=\sum_{i=NA}^{n} f_A(i)$$

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variable indépendantes, on obtient que pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire binaire $Xf_A(i)$, avec p(« $Xf_A(i)=1$ »)=p_{iA} et les $Xf_A(i)$ sont indépendantes.

Procédant alors comme dans la démonstration de la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1, on obtient pour tout n supérieur à N_A:

$$p("(\frac{1}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \times \sum_{i=NA}^{n} Xf_A(i) - 1) \geq \varepsilon") \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}$$

On définit alors pour n supérieur à N_A la fonction ε(n) :

$$\frac{1}{\varepsilon(n)^2 \sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} = 0.01$$

On remarque que ε(n) est une fonction positive tendant vers 0.

Alors, posant I(n)=[1-ε(n),1+ε(n)], la définition précédente de ε(n) entraîne :

$$p("\frac{\sum_{i=NA}^{n} Xf_A(i)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)") \geq 1-0.01=0.99$$

C'est-à-dire, d'après la définition de S(n) :

$$p("\frac{XS(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)") \geq 0.99$$

Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes aux variables aléatoires XS(n), on peut supposer qu'elles sont indépendantes.

Définissant alors la variable aléatoire Y(n) :

$$Y(n)=t("\frac{XS(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}\in I(n)")$$

On rappelle la Loi Forte des Grands Nombres de Khintchine [6] :

Si $(X_i)_N$ sont des variables aléatoires indépendantes, X_i ayant une espérance m_i et une variance σ_i^2, les variances étant uniformément variées ($\sigma_i^2<c$ pour tout i), alors $\left|\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_i)\right|$ converge presque sûrement vers 0 (La probabilité de l'évènement « $\left|\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_i)\right|$ tend vers 0 » est égale à 1.

Appliquant la Loi de Khintchine précédente, on obtient que la probabilité de l'évènement suivant Ev(Y) est égale à 1 :

Ev(Y) : « Il existe un naturel N tel que pour n>N :

$$\frac{1}{n-N_A+1}\sum_{i=NA}^{n} Y(n)\geq 0{,}98$$

Et donc, appliquant la propriété de corresondance, remplaçant dans l'expression précédente XS(n) par S(n), et appliquant le pseud-Axiome du modèle exact 2.A.2, on obtient que la proposition suivante P2(S(n)) a une pseudo-preuve aléatoire :

P2(S(n)) : Il existe un naturel N tel que pour tout n > N :

$$\frac{1}{n-N_A+1}\times\sum_{i=NA}^{n} t("\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}\in I(n)")\geq 0.98$$

On est donc dans le 2ième cas de l'Etude théorique d'une fonction par la TAN 4A.7a). On remarque qu'on aurait pu dans P2(S(n)) remplacer 0,98 par n'importe quel réel p<1.

On voit cependant que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée permet d'obtenir plus simplement le Théorème 4A.7, et permet d'obtenir la proposition suivante P1(S(n)) (Correspondant au premier cas de l'Etude théorique 4.A.7a)), qui est clairement plus intéressante car plus précise que la proposition précédente P2(S(n)) :

P1(S(n)) : « $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}\right)=1$

Si A et B sont 2 ensembles estimés d'estimation a(n) et b(n), on cherche à obtenir une évaluation probabiliste de $A\cap B$, ce qui permettra soit d'obtenir que la proposition « $A\cap B$ est un ensemble estimé d'estimation i(n) (que l'on va déterminera) », soit la proposition « $A\cap B$ est fini. » ont une pseudo-preuve aléatoire.

Pour obtenir un tel modèle statistique de $A \cap B$, on doit tout d'abord appliquer la pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et à B, pour obtenir une évaluation probabiliste de A et de B. Puis, obtenant que A et B on une évaluation probabiliste p_{iA} (avec i supérieur à N_A) et p_{iB} (avec i supérieur à N_B), on applique le pseudo-Axiome de l'*intersection des ensembles estimés suivant*, permettant d'obtenir une évaluation probabiliste de $A \cap B$:

PSEUDO-AXIOME 4.A.8 (de l'intersection des ensembles estimés-1^{ière} forme) :

Si A et B sont 2 ensembles d' évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB}, avec respectivement i supérieur (au sens large) à N_A et i supérieur à N_B, alors lorsque le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 1^{ière} forme est valide pour (A,B,I) ,(avec $I=A \cap B$), I est un ensemble d'estimation probabiliste $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$.

(On peut considérer que la proposition précédente n'est pas un pseudo-Axiome aléatoire, mais une proposition ayant une pseudo-preuve aléatoire. En effet on l'obtient immédiatement en appliquant le pseudo-axiome 2.A.4 des variables indépendantes.)

Nous allons donner 2 justifications intuitives à ce pseudo-Axiome :
On doit donc justifier qu'avec les hypothèses précédentes pour A et B, « $f_I(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$.

1^{ière} justification intuitive :
Cette première justification est basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3. On rappelle que le premier article [(5)] était basé sur ce modèle équiprobable.
Supposons qu'on ait un ensemble $E=\{1,\ldots,n\}$.
Soient A et B deux sous-ensembles de E, pour lesquels on connaisse le nombre d'éléments a et b.
D'après le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i,A,E), i étant un élément de E, si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i,B,E), on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
f_A et f_B étant les fonctions caractéristiques de A et B, on a donc pour tout i dans E:
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$, et
« $f_B(i) =1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
Les 2 modèlisations précédentes sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, remplaçant E par l'ensemble des naturels supérieurs à $N_I=\sup (N_A,N_B)$, et prenant $p_{iA}=a/n$ et $p_{iB}=b/n$.

Considérons maintenant l'ensemble :
$\Omega_{AB} =\{(A',B')$, A' et B' sous-ensembles de E ayant respectivement a et b éléments$\}$.
i étant un élément de E, on définit l'ensemble :
$I_{AB}(i)=\{(A',B')$ appartenant à Ω_{AB}, avec i appartient à A' et B'$\}$
Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à $((A,B),I_{AB}(i),\Omega_{AB})$, on obtient que « (A,B) est élément de $I_{AB}(i)$ » est modélisée par l'évènement « (A',B') est élément de $I_{AB}(i)$ » de l'espace équiprobable Ω_{AB}.
Remarquant que la proposition « (A,B) est élément de $I_{AB}(i)$ » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec $I=A \cap B$) », et qu'on obtient que $\mathrm{Card}(I_{AB}(i))/\mathrm{Card}(\Omega_{AB})=ab/n^2=p_{iA}p_{iB}$, on obtient :
« $f_I(i) =1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i appartenant à E.
Ceci constitue donc une première justification intuitive du pseudo-Axiome.

2ième justification intuitive :
On suppose que A et B sont 2 ensembles quelconques parmi tous les ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} avec respectivement i supérieur à N_A et i supérieur à N_B.

On a donc, pour i supérieur à $\sup(N_A,N_B)$, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_A(i)$ de probabilité p_{iA} et « $f_B(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_B(i)$ de probabilité p_{iB}.
Puisque A et B sont quelconques d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB}, il est évident que, i étant supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$, la proposition « $f_A(i)=1$ » (qui est équivalente à « i est élément de A ») est totalement indépendante de la proposition « $f_B(i)=1$ » (qui est équivalente à « i est élément de B »).
Or on peut admettre intuitivement que si on a les modélisations :
« La proposition P1 est modélisée par l'évènement Ev1 » et « La proposition P2 est modélisée par l'évènement Ev2 », alors si P1 et P2 sont complètement indépendantes, on peut considérer que Ev1 et Ev2 appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.

On obtient donc qu'on peut considérer que $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.
Donc « $f_I(i)=1$ » (qui est équivalent à la proposition « $f_A(i)=1$ » et « $f_B(i)=1$ ») est modélisée par un évènement $Ev_I(i)$ de probabilité $p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$.

Souvent, on ne peut pas considérer que A et B sont 2 ensembles quelconques d'estimation a(n) et b(n), car on sait qu'ils appartiennent tous les 2 à un ensemble estimé C d'estimation c(n), avec a(n),b(n),c(n) connues.
On peut alors obtenir un modèle statistique bien meilleur qu'en appliquant le pseudo-Axiome précédent de l'intersection des ensembles estimés 1^{ière} forme.
On emploie en effet alors le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme suivant :

PSEUDO-AXIOME 4.A.9 (de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme) :

Si A,B,C sont des ensembles tels que A et B sont inclus dans C, A,B,C ayant respectivement des évaluations probabilistes p_{iA},p_{iB},p_{iC}, pour i respectivement supérieur à N_A,N_B,N_C, alors, lorsque le pseudo-Axiome 4.A.9 de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme est valide pour (A,B,C,I) (avec $I=A\cap B$), I est un ensemble d'évaluation probabiliste $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$., pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B,N_C)$.

Nous allons donner 2 justifications intuitives à la 2ième forme de ce pseudo-Axiome qui sont analogues et généralisent celles de la 1^{ière} forme.
On doit donc justifier qu'avec les hypothèses précédentes pour A,B et C « $f_I(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ pour i supérieur à $\sup(N_A,N_B,N_C)$.

1^{ière} justification intuitive :

Cette première justification est aussi basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3.
Supposons qu'on ait toujours un ensemble E={1,….,n}.
Soient A,B,C trois sous-ensembles de E, pour lesquels on connaisse le nombre d'éléments a,b et c, et tels que A et B soient inclus dans C.
D'après le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i,A,E), i étant un élément de E, si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i,B,E), on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
De même, « i est élément de C » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.

f_A ,f_B et f_C étant les fonctions caractéristiques de A, B et C, on a donc pour tout i dans E:
-« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
-« $f_B(i) =1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
-« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.

Les modélisations précédentes, ainsi que la proposition « A et B sont inclus dans C » sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, en remplaçant E par l'ensemble des naturels supérieurs à $\sup(N_A,N_B,N_C)$.

Considérons maintenant l'ensemble :
Ω_{ABC} ={(A',B',C'), A',B' et C' sous-ensembles de E ayant respectivement a, b et c éléments, avec A' et B' sont inclus dans C'}.
i étant un élément de E, on définit l'ensemble :
$I_{ABC}(i)$={(A',B',C') appartenant à Ω_{ABC}, avec i appartient à A' et B'(et donc à C')}
Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à $((A,B,C),I_{ABC}(i),\Omega_{ABC})$, on obtient que « (A,B,C) est élément de $I_{ABC}(i)$ » est modélisée par l'évènement « (A',B',C') est élément de $I_{ABC}(i)$ » de l'espace équiprobable Ω_{ABC}.
Remarquant que la proposition « (A,B,C) est élément de $I_{ABC}(i)$ » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec $I=A\cap B$) », et qu'on obtient (par récurrence) que $Card(I_{ABC}(i))/Card(\Omega_{ABC})=ab/nc=p_{iA}p_{iB},/p_{iC}$ on obtient que pour i dans E :
« $f_I(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$.
Ceci constitue une 1ière justification intuitive de la 2ième forme du pseudo-Axiome considéré.

2ième justification intuitive :

On considère que (A,B,C) est un triplet quelconque parmi tous les triplets (A',B',C') tels que A', B',C' ont des évaluations probabilistes p_{iA},p_{iB},p_{iC}, pour i respectivement supérieur à N_A,N_B,N_C, et tels que A'et B' soient inclus dans C'.
On a donc, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B,N_C)$, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_A(i)$ de probabilité p_{iA} ,« $f_B(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_B(i)$ de probabilité p_{iB} , et « $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_C(i)$ de probabilité p_{iC}.

On ne peut plus considérer que la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B », puisque A et B sont tous 2 inclus dans C. Cependant, il est clair que la proposition « i est élément de A » entraîne « i est élément de C », et de même pour la proposition « i est élément de B ».
Or il est logique intuitivement, si on a 2 modélisations « La proposition P1 est modélisée par l'évènement Ev1 » et « La proposition P2 est modélisée par l'évènement Ev2 », et que la proposition P1 entraîne la proposition P2, de considérer que Ev1 entraîne Ev2, c'est-à-dire que Ev1 et Ev2 appartiennent au même espace probabilisable et que Ev1 est inclus dans Ev2.
On peut donc considérer d'après ce qui précède, pour i supérieur à N_I, $Ev_A(i)$,$Ev_B(i)$ et $Ev_C(i)$ appartiennent au même espace probabilisable et $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$.

De plus, généralisant le propriété de correspondance (utilisée pour définir le concept « *est modélisée* par »), on peut considérer que la proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est modélisée par l'évènement « $Ev_A(i)$ sachant $Ev_C(i)$ » (noté conventionnellement $Ev_A(i)/Ev_C(i)$).
De même, la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » » est modélisée par l'évènement $Ev_B(i)/Ev_C(i)$.
Or, C étant un ensemble d'évaluation probabiliste p_{iC} (i supérieur à N_C)quelconque, on peut considérer que A et B sont 2 sous-ensembles quelconques de C, d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} (pour i supérieur à N_A et N_B).
On peut donc considérer que sachant « i est élément de C », alors la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B ».
Ceci s'écrit aussi:
La proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est indépendante de la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » »
En appliquant la même remarque que pour la 2ième justification intuitive de la première forme du pseudo-Axiome, on obtient que l'évènement $Ev_A(i)/Ev_C(i)$ est indépendant de l'évènement $Ev_B(i)/Ev_C(i)$.

Puisque $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ appartiennent au même espace probabilisable, on obtient donc :
« « $f_A(i)=1$ » et « $f_B(i)=1$ » » (qui est équivalente à « $f_I(i)=1$ ») est modélisée par l'évènement « $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ ».
Or dans l'espace probabilisable de $Ev_A(i)$,$Ev_B(i)$, $Ev_C(i)$ on obtient :

$$p(Ev_A(i) et Ev_B(i)) = p((Ev_A(i) et Ev_B(i)) / Ev_C(i)) p(Ev_C(i))$$
$$p(Ev_A(i) et Ev_B(i)) = p((Ev_A(i) / Ev_C(i)) et (Ev_B(i) / Ev_C(i))) p(Ev_C(i))$$
$$p(Ev_A(i) et Ev_B(i)) = \frac{p(Ev_A(i))}{p(Ev_C(i))} \times \frac{p(Ev_B(i))}{p(Ev_C(i))} \times p(Ev_C(i)) = \frac{p_{iA} p_{iB}}{p_{iC}}$$

On justifie les expressions précédentes comme suit :

Si on suppose que pour un i donné, $Ev_C(i)$ est réalisé. Alors la probabilité de ($Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$) notée p($Ev_A(i)$et $Ev_B(i)/Ev_C(i)$) est alors égale à $p_{iA}p_{iB}/p_{iC}^2$. (où on a utilisé que $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$, et que $Ev_A(i)/Ev_C(i)$ et $Ev_B(i)/Ev_C(i)$ sont indépendants).
Soit i quelconque, alors la probabilité de ($Ev_A(i)$et $Ev_B(i)$) est égale à la probabilité que $Ev_C(i)$ soit réalisé (puisque $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$) multipliée par la probabilité de ($Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$) supposant $Ev_C(i)$ réalisé. D'où le résultat.

On a donc donné une 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme.

Nous allons maintenant présenter certains Théorèmes et notions importantes permettant d'obtenir des estimations de certains sous-ensembles de **N**.

DEFINITION 4.A.10 : (ensembles image- fonction ordonnée)

Si A est un sous-ensemble infini de **N*** et est l'image d'une fonction numérique $f_A(i)$, strictement croissante sur **N***, alors on dira que A est *l'ensemble image* de f_A sur **N***., et que f_A est une *fonction ordonnée* sur **N***. (On pourrait généraliser cette définition en remplaçant **N*** par un sous-ensemble infini quelconque de **N***).

On remarque que si A est un sous-ensemble quelconque infini de **N***, on peut définir :
$f_A(1)$ comme le premier élément de A,
$f_A(2)$ comme le 2ième élément de A
et pour tout n $f_A(n)$ est le nième élément de A.
Donc il existe toujours une fonction ordonnée f_A dont A est l'ensemble image (sur **N***).
Réciproquement, si A est l'ensemble image de f_A sur **N***, on a nécessairement :
$f_A(1)$ est le premier élément de A, et par une récurrence immédiate $f_A(n)$ est le nième élément de A.
On a donc le Théorème :

THEOREME 4.A.11 :

Pour tout sous-ensemble estimé A de **N***, il existe une et unique fonction f_A dont A est l'ensemble image sur **N***.

DEFINITION 4.A.12:

Si A est l'ensemble image d'une fonction f_A sur **N***, alors, pour toute fonction f_{Abij} de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, continue, strictement croissante, telle que $f_{Abij}(0)=0$ et pour tout i dans **N***, $f_{Abij}(i)=f_A(i)$, on dira que f_{Abij} est une *bijection (numérique) ordonnée* sur $\mathbf{R}^+$, et que A est l'ensemble image de la *bijection ordonnée* f_{Abij}. (Car il est évident que f_{Abij} est nécessairement une bijection).

Puisque f_{Abij} coïncide partout avec f_A sur **N***, on emploiera la même notation f_A pour désigner l'une ou l'autre fonction, sauf en cas d'ambiguïté.

REMARQUE 4.A.13 :

Il est évident que pour toute fonction f_A définie sur **N***, il existe une infinité de bijections f_{Abij} pouvant convenir. On verra en fait que seul le comportement à l'infini de f_{Abij} sera important pour déterminer l'estimation a(n) de l'ensemble A, et donc il suffira de connaître f_{Abij} (x) (noté aussi $f_A(x)$) pour x supérieur à un naturel quelconque N_A).

On a alors le Théorème important :

THEOREME 4.A.14 :

Si A est l'ensemble image d'une bijection ordonnée f_A sur $\mathbf{R}^+$ alors A est un ensemble estimé d'estimation $f_A^{-1}(n)$.
(Puisque f_A est strictement croissante et tend vers l'infini, il en est de même pour f_A^{-1})

Démonstration :

On rappelle que A(n) est l'ensemble des éléments de A inférieurs à n.(On emploiera toujours les termes « inférieurs » ou « supérieurs » au sens large.)
D'après l'hypothèse, tout élément de A s'écrit $f_A(i)$, ou i appartient à **N***.
On a donc $A(n)=\{f_A(i)/\ f_A(i)\leq n$ et i appartient à **N***$\}$.
Or, $f_A(i)\leq n$ est équivalent à $i\leq f_A^{-1}(n)$, puisque f_A est une bijection strictement croissante .
Donc $Card(A(n))=E(f_A^{-1}(n))$, donc $Card(A(n))\approx f_A^{-1}(n)$ pour n tend vers l'infini ce qui signifie que A est un ensemble estimé d'estimation $f_A^{-1}(n)$.

Si A est l'ensemble image d'une bijection ordonnée f_A définie sur $\mathbf{R}^+$, dans de nombreux cas f_A^{-1} est très difficile à obtenir. Par contre, en général, on connaît une fonction g_A, à valeur dans $\mathbf{R}^{*+}$, strictement croissante définie pour x assez grand, continue, et telle que f_A soit équivalente à g_A à l'infini et qu'on connaisse g_A^{-1}, pour x assez grand.
On peut alors en général utiliser le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.15 :

Si f est une fonction strictement positive et continue, définie pour x supérieur à un réel strictement positif Kf, strictement croissante, telle qu'il existe une fonction g strictement positive et continue, définie pour x assez grand (x supérieur à Kf), strictement croissante et que l'on ait:

(i)f est équivalente à g à l'infini.

(ii)On connaît g^{-1}, et pour toute fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 à l'infini :
$g^{-1}(x(1+\varepsilon(x))$ est équivalente à $g^{-1}(x)$ à l'infini.

Alors $f^{-1}(x)$ est équivalente à $g^{-1}(x)$ à l'infini.

Démonstration :

Puisque g est équivalente à f, pour x supérieur à Kf, on a une fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 pour x tend vers l'infini avec : $g(x)=f(x)(1+\varepsilon(x))$.
De plus pour x supérieur à Kf:
$x=g^{-1}(g(x))=g^{-1}(f(x)(1+\varepsilon(x))$

Pour x supérieur à Kf, on pose f(x)=X. Donc $x=f^{-1}(X)$.
On obtient, pour $f^{-1}(X)$ supérieur à Kf, soit X supérieur à f(Kf) :
$f^{-1}(X)=g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X)))$.
Donc :

$$\frac{g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X))))}{f^{-1}(X)}=1$$

Pour montrer que f^{-1} est équivalente à g^{-1} à l'infini, il suffit de montrer que :
$g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X)))$ est équivalente à $g^{-1}(X)$.
Ceci est vrai car $f^{-1}(X)$ tend vers l'infini pour X tend vers l'infini et d'après (ii).
On a donc montré le Théorème.

La condition (ii) sera en général vérifiée, dans le cas où f est une fonction ordonnée sur **N***, car comme on le verra, les estimations s'expriment comme fonctions simples des fonctions Log(x), x et de leurs puissances réelles. Il en sera de même en général de la fonction g^{-1}, et comme on a toujours, pour tout réel α et pour toute fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 à l'infini, $Log(x(1+\varepsilon(x)))^{\alpha}$ est équivalente à l'infini à $(Log(x))^{\alpha}$, et $(x(1+\varepsilon(x)))^{\alpha}$ est équivalente à x^{α}, on aura en général $g^{-1}(x(1+\varepsilon(x)))$ est équivalente à $g^{-1}(x)$ à l'infini.

REMARQUE 4.A.16 :

Le Théorème précédent peut aussi être utilisé dans certains cas où on ne connaît pas de fonction g équivalente à f_A, connaissant g^{-1}, mais qu'on peut encadrer f_A par de telles fonctions f_{A1} et f_{A2}, équivalentes à g_1 et g_2, et dont on connaît g_1^{-1} et g_2^{-1}.

En effet, supposant qu'on ait une fonction $f_A(x)$, et 2 fonctions f_{A1} et f_{A2} définies pour x assez grand et strictement positives, telles que f_{A1} et f_{A2} soient strictement croissantes ,tendent vers l'infini et :
$f_{A2}(x)<f_A(x)<f_{A1}(x)$.

Remarquant que si f et g sont 2 fonctions strictement croissantes définies pour x supérieur (au sens large) à K, strictement positives, tendant vers l'infini, telles que pour tout x supérieur ou égal à K : $f(x)<g(x)$.
On obtient que f et g ont des fonctions réciproques f^{-1} et g^{-1} avec :
Pour f(x)supérieur à K :
$f^{-1}(f(x))<f^{-1}(g(x))$, soit $x<f^{-1}(g(x))$
Et pour $g^{-1}(x)$supérieur à K (c'est-à-dire x supérieur à g(K)) :
$g^{-1}(x)<f^{-1}(x)$.

Il en résulte que pour x assez grand :
$f_{A1}^{-1}(x)<f_A^{-1}(x)<f_{A2}^{-1}(x)$.
Si on a $f_{A1}(x)$ est équivalente à une fonction $g_1(x)$ et $f_{A2}(x)$ est équivalente à une fonction $g_2(x)$ telles qu'on puisse dans les 2 cas appliquer le Théorème précédent et que de plus, à l'infini
$g_2^{-1}(x)$ soit équivalente à $g_1^{-1}(x)$, on obtient alors $f_A^{-1}(x)$ est équivalente à l'infini à $g_1^{-1}(x)$.

Par exemple considérons la fonction ordonnée sur **N*** :
$f_A(n)=E(\exp(n)+Log(n)+n^{1/2})$.

Il est évident qu'on peut définir une bijection ordonnée sur $\mathbf{R}^+$ $f_{Abij}(x)$ coincidant avec f_A sur **N***. On suppose que f_{Abij} est l'une de ces bijections ordonnées.
Il est difficile de trouver une fonction g(x) équivalente à $f_{Abij}(x)$, car $f_A(n)$ n'est pas équivalente à $f_A(n+1)$.
Par contre on peut définir :
$f_{A2}(x)=\exp(x-2)+Log(x-2)+(x-2)^{1/2}$.
$f_{A1}(x)=\exp(x+2)+Log(x+2)+(x+2)^{1/2}$
On obtient alors, pour x assez grand :
$f_{A2}(x)<f_{Abij}(x)<f_{A1}(x)$.

On obtient l'expression précédente remarquant que pour n supérieur à 5, si on considère l'intervalle $I(n)=[n-1,n]$, d'après la définition de f_{Abij}, on a pour tout x dans I(n), $f_A(n-1)$ est inférieur (au sens large) à $f_{Abij}(x)$ qui est inférieur à $f_A(n)$.
Or il est évident, d'après l'expression de $f_A(n)$, que pour tout x dans I(n), on a $f_{A2}(x)<f_A(n-1)$ et $f_{A1}(x)>f_A(n)$. On obtient donc l'expression précédente , pour x supérieur à 5.

Appliquant le Théorème précédent A.15 , on obtient que f_{A1}^{-1} est équivalente à la fonction $g_{A1}^{-1}(x)$, $f_{A2}^{-1}(x)$ est équivalente à $g_{A2}^{-1}(x)$, avec $g_{A1}^{-1}(x)$ et $g_{A2}^{-1}(x)$ équivalentes à Log(x).
On en déduit donc $f_{Abij}^{-1}(x)$ est équivalente à Log(x).

REMARQUE 4.A.17 :

Il est clair que si A est un ensemble estimé d'estimation a(n), on peut trouver une infinité d'autres estimations de A, qui sont toutes les fonctions équivalentes à a(n) et qui peuvent être très compliquées. L'intérêt de la TAN et qu'on ne considère que les expressions les plus simples de a(n), parce que ce sont elles les plus régulières et qu'elles sont celles susceptibles de donner les meilleurs modèles statistiques.
Ainsi , on dira qu'une fonction d'estimation a(n) est *régulière* si on a :
a) a(x) est infiniment dérivable pour x assez grand.
b)Toutes les dérivées de a(x) sont monotones pour x assez grand, et a'(x) inférieur à 1 pour x assez grand. De plus $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$ est équivalente à a'(i) à l'infini.
c)a(x) est une fonction simple des fonctions x, Log(x) et de leurs puissances réelles.

En général, les estimations les plus simples sont *régulières* pour les raisons suivantes :
On remarque que le fait qu'en général, la dérivée a'(x) d'une estimation est inférieure à 1 est dû au fait qu'on $a(n)-a(n-1)=a'(x)$, avec x dans [n-1,n], qu'on a en général a(n)-a(n-1) est inférieur à 1 et que la fonction a'(x) est monotone pour x assez grand.
Une conséquence de ceci est qu'en général a(x) n'est pas fonction de exp(x), dont la dérivée tend vers l'infini à l'infini. De même, a(x) ne doit pas s'exprimer avec des parties entières, car alors a) ne serait plus vérifié.
C'est pourquoi on peut et on doit être dans le cas c).
Le fait que a(x) est une fonction simple des fonctions x et Log(x), et que $a(i)-a(i-1)=a'(x)$ où x appartient à [i-1,i], entraîne que a(i)-a(i-1) est équivalente à a'(i).(C'est-à-dire le b))

Si a(n) est une fonction régulière, d'après c) a'(x) est aussi fonction simple des fonctions x et Log(x), de même que la dérivée de a(x) à tout ordre.
Considérons un ensemble estimé A d'estimation a(n) et b(n), avec a(x) est donc équivalente à b(x) et de plus a(x) et b(x) sont des fonctions d'estimation régulières.
Montrons que si on a $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$ et $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$, on a en général p_{iA} est équivalente à p_{iB} à l'infini.

En effet d'après b), p_{iA} est équivalente à a'(i) et p_{iB} est équivalente à b'(i). a'(x) et b'(x) étant monotone pour x assez grand, il suffit donc de montrer que a'(x) est équivalente à b'(x) à l'infini.
Or d'après c), la fonction $r(x)=a'(x)/b'(x)$ est aussi une fonction simple des fonctions Log(x) et x, de même que sa dérivée r'(x). Il en résulte que r'(x) est équivalente à l'infini à une fonction strictement positive ou strictement négative, et donc r(x) est monotone pour x assez grand et donc r(x) a une limite l, éventuellement infinie.
Montrons que cette limite l est nécessairement égale à 1 :
En effet, supposons $l>1$.
Donc il existe $\varepsilon>0$, tel qu'il existe $K>0$ tel que pour tout t supérieur à K, $r(t)>1+\varepsilon$, c'est-à-dire :$a'(t)>b'(t)(1+\varepsilon)$.
En intégrant entre K et x, x étant supérieur à K, on obtient :
$a(x)-a(K)>(1+\varepsilon)(b(x)-b(K))$.
Et donc pour x supérieur à K:

$a(x)/b(x)>1+\varepsilon+a(K)/b(x)-(1+\varepsilon)b(K)/b(x)$.

Il est évident que le 2[ième] terme de cette inégalité tend vers $1+\varepsilon>0$, et est incompatible avec l'hypothèse que $a(x)/b(x)$ tend vers 1 pour x tend vers l'infini.

Il est donc impossible qu-on ait $l>1$, et de même on montre qu'il est impossible qu'on ait $l<1$. Donc $l=1$, et on a bien p_{iA} est équivalente à p_{iB}.

Le résultat précédent est important car A, B, C étant 3 ensembles estimés, appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A,B,C puis le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés, on obtient des résultats équivalents quels que soient les fonctions d' estimation utilisées de A,B,C, du moment qu'elles soient régulières.

Pour obtenir la remarque précédente, on utilise le résultat important que si a(n), b(n), c(n) sont des estimations régulières, avec $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$, $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$, $p_{iC}=c(i)-c(i-1)$, alors la convergence à l'infini de la série $\Sigma p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ est équivalente à la convergence à l'infini de l'intégrale $\int a'(x)b'(x)/c'(x)dx$, et de plus si elles divergent, on a pour tout naturel N :

$$\int_N^n \frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)}dx \approx \sum_{i=N}^n \frac{p_{iA}p_{iB}}{p_{iC}}.$$

On utilisera aussi le fait que si f et g sont 2 fonctions strictement positives et monotones, définie pour x supérieur à K, avec f équivalente à g en l'infini, alors la convergence à l'infini de l'intégrale $\int f$ est équivalente à celle de l'intégrale $\int g$, et si elles divergent :

$$\int_K^x f(t)dt \approx \int_K^x g(t)dt$$

En utilisant exactement la même méthode que dans la partie 3.DECIMALES d' IRRATIONELS , pour obtenir que la proposition « Il existe une infinité de chiffres égaux à 5 dans les décimales de $\sqrt{3}$ », considérant en particulier les mêmes ensembles F_i, on obtient le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.18 :

Si on a un ensemble A d'évaluation probabiliste p_{iA}, pour i supérieur à N_A, alors :

a)Si la série Σp_{iA} diverge, la proposition « A a une infinité d'éléments » a une pseudo-preuve aléatoire.

b)Si la série Σp_{iA} converge, la proposition « A a un nombre fini d'éléments » a une pseudo-preuve aléatoire.

On rappelle que dans le cas a), le Théorème 4.A.7 permet d'obtenir que A est un ensemble estimé dont on obtient une estimation a(n) par une pseudo-preuve aléatoire.

B.EXEMPLES

EXEMPLE 4.B.1 :

Soit à étudier l'ensemble I des nombres premiers pouvant s'écrire $k=10^p+3$.
On va montrer que les 2 propositions P1 :« I est infini » et P2 :« I est un ensemble estimé d'estimation $i(n)=F(n)=\int_{10}^{n}\frac{2}{xLog(x)Log(10)}dx.$ » ont des pseudo-preuves aléatoires.

Il faudrait effectuer des tests en calculant pour de nombreuses valeurs $r(n)=I(n)/i(n)$ (I(n) étant le nombre d'éléments de I inférieurs à n), et vérifier que r(n) semble tendre vers 1, pour obtenir que P1 et P2 ont des explications aléatoires intéressantes c'est-à-dire illustrées par de nombreux tests, à condition que ni P1, ni P2, ni leur négation n'aient été démontrées classiquement.

Démonstration :
(On ne démontre pas les propositions P1 et P2, mais on démontre qu'elles ont des pseudo-preuves aléatoires.)
Soit A l'ensemble des naturels k s'écrivant :$k=10^p+3$, avec p dans **N***.
A est donc l'ensemble image de la fonction ordonnée sur **N*** $f_A(p)=10^p+3$.
On peut alors définir la fonction f_{Abij}, continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, avec pour x supérieur à 1, $f_{Abij}(x)=10^x+3$. f_{Abij} est donc une bijection ordonnée coïncidant avec f_A sur **N*** telle qu'on l'a définie en 4.A.12, et donc qu'on désignera aussi par f_A.
On obtient pour k supérieur à 10+3=13, si $f_A(x)=k$, $f_A^{-1}(k)= x = \log(k-3)$, donc d'après le Théorème 4.A.14, A est un ensemble estimé d'estimation $a(k)=\log(k)$.
Si B est l'ensemble des nombres premiers, on sait que B est un ensemble estimé d'estimation $b(k)=k/Log(k)$.
De plus, A et B sont inclus dans C l'ensemble des nombres impairs qui est un ensemble estimé d'estimation $c(k)=k/2$.
Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A,B,C, on obtient que A,B,C ont des évaluations probabilistes $p_A(i)=a(i)-a(i-1)$, $p_B(i)=b(i)-b(i-1)$, $p_C(i)=c(i)-c(i-1)$, pour i supérieur (respectivement) à N_A,N_B,N_C.
Il en résulte, si on applique le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme 4.A.9, I étant l'intersection de A et B, I a une évaluation probabiliste $p_I(i)=p_A(i)p_B(i)/p_C(i)$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B,N_C)$.

On obtient:

$$\frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)}=\frac{2}{xLog(10)}\times\frac{Log(x)-1}{(Log(x))^2}$$

Comme l'intégrale ∫2/(xLog(10)Log(x) dx est équivalente à une intégrale de Bertrand qui diverge, il en résulte d'après la Remarque 4.A.17 que la série $\Sigma p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ diverge et que de plus :

$$\sum_{i=NI}^{n}\frac{p_{iA}p_{iB}}{p_{iC}}\approx\int_{NI}^{n}\frac{2}{xLog(x)Log(10)}dx$$

On peut alors utiliser le Théorème 4.A.18 pour obtenir que P1 : « I est infini » a une pseudo-preuve aléatoire.
Si on applique le Théorème 4.A.7, on obtient que la proposition :

« I est un ensemble estimé d'estimation $i(n)=\sum_{i=NI}^{n}p_{iI}$ »

a une pseudo-preuve aléatoire.
On obtient alors immédiatement que cette proposition est équivalente à P2, et donc P2 a bien une pseudo-preuve aléatoire.

EXEMPLE 4.B.2 :

Etudions maintenant l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire $k=2x^r+1$, où r est un naturel supérieur à 2.
On obtient exactement les mêmes résultats que précédemment, avec ici :

$$F(n)=\int_{10}^{n}\frac{2^{1-1/r}}{rx^{1-1/r}Log(x)}dx$$

On procède exactement comme dans l'exemple précédent, avec $a(k)=k^{1/r}/2^{1/r}$, b(k) et c(k) demeurant inchangés. Comme dans l'exemple précédent, il faudrait calculer et tracer I(n)/F(n) pour vérifier que P2 est illustrée par de nombreux tests et donc a une explication aléatoire intéressante, si on ne l'a jamais démontrée classiquement ni sa négation.

EXEMPLE 4.B.3 :

Etudions l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire $k=6.10^p+1$.
On obtient les mêmes résultats que pour les 2 premiers exemples, avec ici :

$$F(n)=\int_{10}^{n}\frac{24}{xLog(x)Log(10)N_C}dx$$

où N_C est le nombre de naturels modulo 24 dont le carré est égal à 1 modulo 24.

Pour obtenir les résultats de cet Exemple, on obtient comme dans le premier exemple que A est un ensemble estimé d'estimation a(k)=log(k).
L'ensemble B et l'estimation b(k) restent inchangés ;
Cependant, on remarque que les éléments de A et de B peuvent s'écrire $\sqrt{(24n+1)}$ où n est un naturel.
On doit donc prendre pour C l'ensemble des naturels $k=\sqrt{24n+1}$.
Pour obtenir c(k), on considère la table des carrés modulo 24, si N_C est le nombre de naturels dont le carré est égal à 1 (modulo 24), il est évident que $c(k)=k(N_C/24)$.
On procède alors comme précédemment pour obtenir la propositions « I est infini » et la proposition donnant l'estimation i(n) de I.

EXEMPLE 4.B.4 :

Etudions l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire : $k=24x^r+1$, r étant un naturel supérieur à 2.
On obtient les mêmes résultats que pour les exemples précédents, avec :

$$i(n)=F(n)=\int_{10}^{n}\frac{24^{1-1/r}}{rx^{1-1/r}Log(x)N_C}dx$$

Pour obtenir ces résultats, on procède comme dans l'Exemple précédent, en conservant b(k) et c(k), et en prenant $a(k)=(k/24)^{1/r}$.

REMARQUE 4.B.5:

Il est clair que les pseudo-Axiomes de la TAN que nous avons donné permettent aussi d'étudier l'intersection d'un nombre d'ensembles estimés arbitraire, en donnant des estimations de ces ensembles estimés.

Dans les exemples précédents, on a proposé seulement des intersections infinies, car ce sont les seules qui peuvent être illustrées par des tests et donc peuvent avoir des explications aléatoires. Il est cependant clair qu'on aurait pu proposer de nombreux exemples où le fait que l'intersection de 2 ensembles estimés est finie a une explication aléatoire.

Il n'est pas sûr en outre que les propositions des exemples précédents aient des explications aléatoires car il est possible qu'on puisse les démontrer classiquement ou leurs négations. On rappelle que par Définition seules les propositions qui n'ont pas de démonstration classique ni leur négation ont une explication aléatoire. Car sinon, leur pseudo-preuve aléatoire est inutile.

On peut donc s'attendre que comme dans les exemples précédents, de très nombreuses propositions en Théorie des Nombres aient une explication aléatoire, et donc tout en ayant une explication rationnelle basée sur le hasard n'aient pas de démonstration classique ni leur négation.

A et B étant 2 ensembles estimés, on peut obtenir dans certains cas un autre modèle de la fonction caractéristique $f_I(i)$, avec $I=A\cap B$.

Ainsi, supposons que A soit l'image d'une fonction ordonnée g_A sur **N***, et que B soit un ensemble estimé d'estimation b(n).

Si on applique à B le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on obtient qu'il existe un naturel N_B tel que pour i supérieur à N_B, $f_B(i)=1$ soit modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$ (f_B étant la fonction caractéristique de B).

On obtient alors immédiatement la modélisation :
« Pour j tel que $g_A(j)$ soit supérieur à N_B, $f_I(g_A(j)=1$ (qui est équivalent à $f_B(g_A(j))=1$) est modélisée par un évènement de probabilité $p_{gA(j)I}=p_{gA(j)B}=b(g_A(j))-b(g_A(j)-1)$. »
(Il est évident que si i ne s'écrit pas $g_A(j)$ pour un naturel j, alors $f_I(i)=f_A(i)=0$, f_A fonction caractéristique de A).

Cette 2[ième] modélisation est plus précise que celle obtenue en appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et B, puisque dans cette 2[ième] modélisation, on ne modélise pas f_A la fonction caractéristique de A, mais on l'utilise directement. Cependant, cette 2[ième] modélisation conduit à des estimations de I équivalentes à celles obtenues par la 1[ière] modélisation , si b(x) est une fonction régulière et que , g_{Abij} étant une bijection ordonnée de classe C^2 sur $\mathbf{R}^+$ associée à g_A (qui existe toujours de façon évidente) $g_A^{-1}(x)$ (qui on le rappelle donne une estimation de A) est équivalente à une fonction régulière.

EXEMPLE 4.B.6 : CONJECTURE FORTE DE GOLDBACH

On peut donner une explication aléatoire à la Conjecture forte de Goldbach, et à des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach, en utilisant la modélisation des ensembles estimés présentée dans cet article, et non plus le modèle équiprobable comme dans l'article [(5)]. Cette 2[ième] modélisation conduit,à des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach beaucoup plus précises que celles obtenues en utilisant le modèle équiprobable.

ETUDE DE r(k) PAR LE MODELE SIMPLE MI 4.B.6A) :

Soit A l'ensemble des nombres premiers. On sait que A est un ensemble estimé d'estimation a(n)=n/Log(n).

Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A, on obtient qu'il existe un naturel N_A tel que pour i supérieur (toujours au sens large si on ne précise pas) à N_A, « $f_A(i)=1$ » soit modélisée par un évènement « $Xf_A(i)=1$ » de probabilité $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$. (f_A fonction caractéristique de A) On sait qu'on peut appliquer ce pseudo-Axiome en choisissant N_A assez grand, et on choisira $N_A=501$.

On obtient :

$$p_{iA} = \frac{i}{Log(i)} - \frac{i-1}{Log(i-1)} = \frac{1}{Log(i)}(1+\varepsilon(i))$$

Où la fonction ε(i), complètement déterminée, tend vers 0 pour i tend vers l'infini. (On rappelle qu'une estimation plus précise de a(n) est $\int_{[3,n]}$ (1/Log(x))dx, qui donne la même expression)
On a donc la loi numérique aléatoire :
« Pour i supérieur à $N_A=501$, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_A(i)$, avec p(« $Xf_A(i)=1$ »)=p_{iA} ».
Cependant, comme tous les nombres premiers sont impairs, on peut considérer seulement les naturels i impairs. On obtient alors un meilleur modèle statistique:
Ainsi, considérons 2 ensembles estimés A et C, avec A inclus dans C, et pour i appartenant à C, on cherche à modéliser $f_A(i)=1$, que l'on écrira $f_{A/C}(i)=1$. On cherche donc à modéliser $f_{A/C}(i)$.

On l'obtient par le pseudo-Axiome suivant, de l'inclusion des ensembles estimés, qui se justifie de la même façon que le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2[ième] forme:

PSEUDO-AXIOME 4.B .6.Aa) de l'inclusion des ensembles estimés :

Si A et C sont 2 ensembles d'estimation probabiliste p_{iA} et p_{iC}, pour i supérieur à N_A et N_C (On suppose $N_A=N_C$), avec A inclus dans C, alors lorsque le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés est valide pour (A,C), pour tout i dans C, $f_A(i)$ (notée $f_{A/C}(i)$ est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA/C}=p_{iA}/p_{iC}$.

1ière justification intuitive :

Cette justification est basée sur le modèle équiprobable :
Supposons qu'on ait un ensemble E={1,..,n}, et que A et C soient 2 sous-ensembles de E ayant a et c éléments, avec A inclus dans C.
Appliquant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3 à (i,A,E) puis à (i,C,E), on obtient pour i dans E :
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.
Si maintenant, sachant i appartient à C, on applique le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à (i,A,C) (car A est inclus dans C par hypothèse), on obtient :
« $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité a/c, avec $a/c=p_{iA}/p_{iC}$.
Ceci est donc une première justification.

2ième justification intuitive :

Supposons que (A,C) soit un couple d'ensembles quelconques parmi tous les couples (A',C') tels que A' et C' sont 2 ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iC} pour i supérieur à N_A, et A' est inclus dans C'.
On a donc pour i supérieur à N_A :
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iA} de probabilité p_{iA}.
« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iC} de probabilité p_{iC}.
De plus comme dans la 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme, on peut en premier lieu considérer puisque A est inclus dans C que Ev_{iA} et Ev_{iC} appartiennent au même espace probabilisable et de plus que Ev_{iA} est inclus dans Ev_{iC}, pour i supérieur à N_A.
On peut aussi en second lieu généraliser la propriété de correspondance, en admettant que la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est modélisée par l'évènement « Ev_{iA} sachant Ev_{iC}. (Ev_{iA}/Ev_{iC}).
Or la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est équivalente à « $f_{A/C}(i)=1$ » tel qu'on a défini $f_{A/C}(i)$.
Il en résulte que « $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par l'évènement Ev_{iA}/Ev_{iC} de probabilité p_{iA}/p_{iC}.
On a donc donné une 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome.

I étant l'ensemble des naturels impairs, puisque A est inclus dans I, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (A,I), on obtient que pour i naturel impair supérieur à 501, $f_{A/I}(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}(i)$ avec p(« $Xf_{A/I}(i)=1$ »)$=p_{iA/I}=p_{iA}/p_{iI}=2p_{iA}$. (avec $p_{iI}=1/2$).
Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes on obtient la même loi numérique aléatoire, mais avec des variables $Xf_{A/I}(i)$ définies sur le même espace probabilisable et indépendantes.
Si on définit pour tout n pair (n=2p) la proposition :
P(n) : « n=2p est la somme de 2 nombres premiers (distincts) »,
On considère les naturels n=2p, avec p supérieur à $N_A=501$.
Il est évident alors que « t(P(n)=0 » est équivalente à :
« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » et « $f_{A/I}(3)f_{A/I}(n-3)=0$ »et….et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »,
où p' est le plus grand naturel impair strictement inférieur à p.
On écrit cette proposition :
« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » et…et « $f_{A/I}(499)f_{A/I}(n-499)=0$ » et « $f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)=0$ » et ...et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »

La proposition précédente fait intervenir des naturels n-j avec j inférieur à p' (2ième terme de chaque produit). Il en résulte n-j est supérieur à n-p'=2p –p'>p. (puisque par hypothèse p' est strictement inférieur à p). Donc comme p est supérieur à N_A=501, n-j est toujours supérieur à N_A, et donc $f_{A/I}$(n-j) est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}$(n-j).

D'après la propriété de correspondance (donnée dans les Rappels 2.A), la proposition précédente équivalente à t(P(n))=0 est donc modélisée par l'évènement « Xt(P(n))=0 » de probabilité :
« $f_A(1)Xf_{A/I}(n-1)=0$ »et…et « $f_A(499)Xf_{A/I}(n-499)=0$ »et « $Xf_{A/I}(N_A)Xf_{A/I}(n-N_A)=0$ »et…et « $Xf_{A/I}(p')Xf_{A/I}(n-p')=0$ ».
Et donc utilisant que les $Xf_{A/I}$(i) sont indépendantes, la probabilité de l'évènement précédent est égal au produit des probabilités de chaque évènement. Si on définit P(N_A) l'ensemble des nombres premiers strictement inférieurs à N_A, on a pour tout i strictement inférieur à N_A, si i est dans P(N_A), f_A(i)=1, sinon f_A(i)=0, et donc la probabilité de l' évènement précédent est égale à :

$$p("Xt(P(n))=0")=\prod_{j\in P(NA)}(1-p_{jA/I})\prod_{p'\geq j\geq NA}(1-p_{jA/I}p_{(n-j)A/I})$$

(j représente toujours un naturel impair dans l'expression précédente).

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :
« Pour n=2p supérieur à $2N_A$=1002, t(P(n)) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(n)) définie précédemment ».
Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes à la loi précédente, on obtient la même loi avec les Xt(P(n)) indépendantes.
On peut alors en procédant exactement comme dans l'article [(5)] obtenir que la proposition :
« Pour tout n naturel pair supérieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers distincts », qui est équivalente à « Pour tout n pair supérieur à 1002, t(P(n))=1 », a une pseudo-preuve aléatoire. Et il est évident que cette proposition est équivalente à la Conjecture de Goldbach.
(Puisqu'on vérifie que pour n pair inférieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers).

Avec toujours n=2p naturel pair tel que p supérieur à N_A=501, on définit r(n) comme étant le nombre de paires de nombres premiers distincts dont la somme donne n.
On obtient :
$r(n)=f_A(1)f_{A/I}(n-1)+\ldots+f_A(499)f_{A/I}(n-499)+f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)+..+f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')$.

Or on a vu dans les Rappels 2.A, comme conséquence de la propriété de correspondance, que si on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :
« f(i) est modélisée par la variable aléatoire Xf(i) »,
alors si les Xf(i) sont définies sur le même espace probabilisable, pour tous k1,…,kn appartenant à F, et pour toute fonction $G(x_1,\ldots,x_n)$ définie sur $\mathbf{R}^n$, la fonction G(f(k1),…,f(kn)) était modélisée par la variable aléatoire G(Xf(k1),…,Xf(kn).

Il en résulte que la fonction r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n),avec :

$$Xr(n)=\sum_{j\in P(NA)}Xf_{A/I}(n-j)+\sum_{p'\geq j\geq NA,j\in I}Xf_{A/I}(j)Xf_{A/I}(n-j)$$

On obtient donc la loi numérique aléatoire :
« Pour n pair supérieur à $2N_A$=1002, r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n) définie précédemment ».
On remarque qu'on peut facilement obtenir la moyenne et la variance de Xr(n), les $Xf_{A/I}$(j) étant indépendantes. On peut aussi appliquer le pseudo-Axiome des variables indépendantes pour obtenir la même loi que précédemment, mais avec les Xr(n) indépendantes, et obtenir alors des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach.
On remarque tout d'abord qu'on peut montrer que E(Xr(k)) est équivalente à $E(X_{eq}r(k))$, $X_{eq}r(k)$ étant la variable aléatoire obtenue utilisant le modèle équiprobable modélisant r(k) dans le premier article, c'est-à-dire que E(Xr(k)) est équivalente à $k/(Log(k))^2$.

On obtient ce résultat de la façon suivante :

a)On montre qu'on a l'équivalence, A étant un réell strictement positif :

$$\int_A^n \frac{1}{(Log(x))^2}dx \approx \frac{1}{(Log(n))^2}$$

b)Puis on écrit :

$$\int_A^n \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx = \int_A^{n/2} \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx + \int_{n/2}^n \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx$$

c)Puis on encadre les 2 intégrales du terme de gauche de l'égalité précédente et utilisant a) on obtient :

$$\int_A^n \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx \approx \frac{1}{(Log(n))^2}$$

Utilisant l'inégalité de Chebychev exactement de la même façon que dans la Remarque 4.A.7b), on peut obtenir des intervalles de confiance à 99% I(k)=[1-ε(k),1+ε(k)] de Xr(k)/E(Xr(k)), ε(k) étant une fonction positive tendant vers 0.
Procédant alors exactement comme dans l'estimation de S(n), dans la Remarque 4.A.7b) on obtient que la proposition suivante $P2_{MI}$(r(k)) a une pseudo-preuve aléatoire :

$P2_{MI}$(r(k)) : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$\frac{1}{(n-2N_A)/2+1}\times\sum_{i=2NA}^{n} t("\frac{r(i)}{E(Xr(i))}\in I(i)")\geq 0.98$ (avec i pair et E(Xr(i))≈i/(Log(i))^2) »

Comme dans le modèle équiprobable on obtient que cette proposition n'est pas illustrée par la Comète de Goldbach considérées comme des tests statistiques. Cependant, cette proposition entraîne la proposition $Q2_{MI}$(r(k)) (analogue à Q2 dans la section 4A7a) suivante qui a donc une pseudo-preuve aléatoire :

$Q2_{MI}$(r(k)) : « Il existe 2 réels α,β strictement positifs et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\frac{1}{(n-2N_A)/2+1}\times\sum_{i=2NA}^{n} t("\frac{r(i)}{E(Xr(i))}\in[\alpha,\beta]")\geq 0.98$$

(avec i pair et E(Xr(i))≈i/(Log(i))^2) »

On obtient comme dans l'article [(5)] que $Q2_{MI}$(r(k)) tout en étant illustrée par la Comète de Goldbach n'a pas d'explication aléatoire car contraire à la Conjecture Forte de Goldbach qui on le verra a une pseudo-preuve aléatoire et est beaucoup mieux illustrée par les tests statistiques que $Q2_{MI}$(r(k)). $Q2_{MI}$r(k) est aussi beaucoup plus imprécise que la Conjecture Forte de Goldbach. Cependant, c'est en affinant le modèle statistique utilisé pour obtenir $P2_{MI}$(r(k)) qu'on obtiendra que la Conjecure Forte de Goldbach a une pseudo-preuve aléatoire, dans la section suivante.

Comme dans l'article précédent on peut considérer la proposition $R2_{MI}$(r(k)) obtenue en remplaçant dans $Q2_{MI}$(r(k)) [α,β] par [α,+∞[. On obtient comme dans le premier article [(5)] que cette proposition a une explication aléatoire, donnant notamment la forme de l'équation de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach.

On remarque qu'il est très possible à priori qu'on puisse obtenir des variables aléatoires Xr(n) représentant les propriétés statistiques de r(n) de façon beaucoup plus précises que celles obtenues dans les modèles équiprobables et indépendants exposés précédemment. Cependant, ceci doit nécessiter d'utiliser des propriétés des nombres premiers plus complexes que les 2 seules qu'on a utilisées, c'est-à-dire que les nombres premiers constituent un ensemble estimé d'estimation n/Log(n) inclus dans l'ensemble des naturels impairs. Trouver une loi numérique aléatoire dont on puisse déduire les principales propriétés de la Comète de Goldbach, constitue l'objectif suivant de la TAN, comme on l'a remarqué dans l'Etude théorique d'une fonction par la TAN 4.A.7a).

ETUDE DE LA FONCTION r(k) PAR LE MODELE MI(k)$\pi(p_1,\ldots,p_n)$ 4.B.6B)

On remarque qu'on peut grandement améliorer la qualité des modèles présentés, indépendants et équiprobable, de la façon suivante :
On a vu qu'on a amélioré la qualité du modèle indépendant en utilisant que A l'ensemble des nombres premiers était inclus dans I l'ensemble des nombres impairs.
Plus généralement, supposons qu'on ait un naturel pair k, et que $p_{1k},\ldots,p_{nk}$ soient les diviseurs premiers de k autres que 2 et k/2 (si k/2 premier), avec $p_{1k}<\ldots<p_{nk}$. On peut alors considérer que A est inclus dans l'ensemble $I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$ qui est l'ensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de $p_{1k},\ldots p_{nk}$, à l'exception de $p_{1k},\ldots,p_{nk}$ eux-mêmes. On remarque qu'on a toujours $p_{ik}<k/2$. Afin de simplifier le modèle, on pourrait considérer seulement les nombres premiers p_{ik} inférieurs à P=500. (Il est très possible qu'on obtienne un bon modèle prenant P égal à une valeur beaucoup plus petite que 500).

Remarquant que si j appartient à $I_\pi(p_{1k},..,p_{nk})$, avec j>500, on a alors k-j appartient à $I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$, on peut procéder exactement comme dans le modèle indépendant précédent, remplaçant I par $I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$. Il est clair que cette modélisation est plus précise, et qu'elles conduit aussi à l'existence de bandes correspondant aux naturels pairs ayant certains diviseurs premiers en commun. Il est cependant très possible que cette modélisation ne soit pas assez précise pour décrire complètement ou avec une très bonne approximation les propriétés de la Comète de Goldbach.

(On peut affiner le modèle équiprobable étudié dans l'article précédent [(5)] de la même façon, en remplaçant E(k) l'ensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k par l'ensemble des paires de naturels inférieurs à k appartenant à $I_\pi(p_{1k},..,p_{nk})$ privé de $p_{1k},..,p_{nk}$, B(k) l'ensemble des paires de naturels{i,k-i}, i étant impair par l'ensemble des paires de naturels {i,k-i}, où i appartient à $I_\pi(p_{1k},..,p_{nk}\}$ privé de $p_{1k},\ldots,p_{nk}$ (Car il est évident qu'on a toujours pour j dans {1,..,n} $k-p_{jk}$ est un multiple de p_{jk} et n'est pas premier), et A(k) l'ensemble des paires de naturels premiers inférieur à k par l'ensemble des paires de naturels premiers inférieurs à k et différents de $p_{1k},\ldots,p_{nk}$. On notera $M_{eq}I\pi(p_1,\ldots p_n)$ ce modèle équiprobable analogue au modèle $MI\pi(p_1,..,p_n)$)

En réalité, on voit que les modèles précédents ne sont pas assez bons pour décrire avec une très bonne approximation la Comète de Goldbach. :

On note MI le modèle indépendant étudié précédemment en considérant seulement que A est inclus dans I, et MI(k) le modèle indépendant plus précis décrit précédemment où on considère plus précisément que A est inclus dans $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$.

En effet, on obtient $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$ en considérant l'ensemble des naturels modulo $\pi(k)=p_{1k}\times\ldots\times p_{nk}$. On obtient alors des nombres modulo $\pi(k)$ qui appartiennent tous à I(k). Si n(k) est le nombre de naturels modulo $\pi(k)$ qui appartiennent tous à I(k) alors il vient immédiatement que I(k) est un ensemble estimé d'estimation $i_{I(k)}(n)=p_{I(k)}n$, avec $p_{I(k)}=n(k)/\pi(k)$.
En procédant alors comme dans le modèle MI, on obtient dans le modèle MI(k) que (avec des notations évidentes) $m_{I(k)}$ (k)est équivalent à $(p_I/p_{I(k)})m_I$ (k) , c'est-à-dire $m_{I(k)}(k)$ est équivalent à $(p_I/p_{I(k)})k/(\mathrm{Log}(k))^2$.
Comme on a toujours p_I supérieur à $p_{I(k)}$, on devrait donc trouver d'après le modèle MI(k) que tous les points (k,r(k) doivent être au dessus de la courbe $(k,m_I(k))$. Or cela n'est visiblement pas le cas, la plupart des points (k,r(k)) sont au dessous de la courbe. (C'est une remarque analogue qui permettait d'invalider la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood [(5)].)

On peut cependant améliorer encore le modèle MI(k) de la façon suivante :
Considérons un naturel k pair n'ayant aucun autre diviseur premier que 2. ($k=2^n$).On a vu que dans le modèle MI, on a utilisé l'expression:

$r_I(k)=f_A(1)f_A(k-1)+\ldots+f_A(499)f_A(k-499)+f_A(N_A)f_A(k-N_A)+..+f_A(p')f_A(k-p')$.
, avant d'appliquer la propriété de correspondance permettant de modéliser r(k) par la variable aléatoires $X_Ir(k)$.
On peut donc écrire aussi :
$r_I(k)=C_I(k)+S_I(k)$, avec $C_I(k)$ est majorée par une constante ($C_I(k)=f_A(1)f_A(k-1)+\ldots+f(499)f_A(k-499)$, et $S_I(k)= f_A(N_A)f_A(k-N_A)+..+f_A(p')f_A(k-p')$.

Dans cette expression, on sait que certains termes de la forme $f_A(i)f_A(k-i)$ sont nuls, par exemple tous les termes tels que i est multiple de 3,5…Nous allons introduire un nouveau modèle MIπ(3), améliorant la modèle MI, dans lequel on utilise que tout multiple de 3 (sauf 3), n'est pas premier. On peut réécrire $S_I(k)$ sous la forme $S_{I\pi(3)}$ (k) suivante, $I_\pi(3)$ ayant été précédemment défini comme l'ensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de 3 :
$S_{I\pi(3)}(k)=\sum_{i\in I\pi(3)} f_A(i)f_A(k-i)$, avec 500<i<k/2.

On sait que i appartient à $I_\pi(3)$ signifier i congru à 1 ou 5 modulo 6, et in a vu que i appartient à I signifie i congru à 1,3 ou 5 modulo 6. On a donc $p_{iI\pi(3)}=1/3$ et $p_{iI}=1/2$.
De plus il est évident que $S_{I\pi(3)}(k)$ contient les 2/3 des termes de $S_I(k)$ (c'est-à-dire $p_{iI\pi(3)}/p_{iI}$, puisque la proportion des éléments de {1,…,k/2-1} tels que i appartient à I est égale à p_{iI} (ou plutôt tend vers p_{iI}), et la proportion de ceux tels que i appartient à Iπ(3) est égale à $p_{iI\pi(3)}$.
De plus, si on considère un terme de la somme $S_{I\pi(3)}$ (k) $f_A(i)f_A(k-i)$, on sait que i appartient à $I_\pi(3)$, et donc on peut écrire $f_A(i)$ sous la forme $f_{A/I\pi(3)}$ (i).
D'autre part par hypothèse k est pair et n'est pas divisible par 3, donc k est congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6. Or dans $S_{I\pi(3)}$ (k) les termes sont congrus alternativement à 1 ou 5 modulo 6. On a donc alternativement k-i congru à 1 ou 3 modulo 6, et donc un terme sur 2 de la somme $S_{I\pi(3)}$ (k) est nul (k-i étant multiple de 3).
Pour chaque terme non nul, k-i est congru à 1 modulo 6, donc k-i appartient à $I_\pi(3)$, et on peut écrire $f_A(k-i)$ sous la forme $f_{A/I\pi(3)}$ (k-i). (on vérifie qu'on obtient le même résultat si k congru à 4 modulo 6).

On a donc obtenu les 3 points fondamentaux suivants, k n'ayant aucun autre diviseur premier que 2:
a)La somme $S_{I\pi(3)}$ (k) contient les 2/3 (c'est-à-dire $p_{iI\pi(3)}/p_{iI}$) des termes de $S_I(k)$.
b)1 terme sur 2 de $S_{I\pi(3)}$ (k) est nul.
c)Chaque terme non nul de $S_{I\pi(3)}$ (k) s'écrit $f_{A/I\pi(3)}$ (i) $f_{A/I\pi(3)}$ (k-i), et est donc modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I\pi(3)}(i)\ Xf_{A/I\pi(3)}(k-i)$ définie dans le Pseudo-Axiome 4.B.6a) de l'inclusion des ensembles estimés.
Utilisant la loi numérique aléatoire modélisant $f_{A/I\pi(3)}(i)$, on obtient donc que chaque terme non nul de $S_{I\pi(3)}$ (k) a une probabilité $p_{iA}p_{k-iA}/(p_{iI\pi(3)})^2$ d'être égal à1.

Utilisant les 3 propriétés précédentes, on obtient que dans le modèle MIπ(3), r(k) est modélisée par une variable aléatoire $X_{I\pi(3)}$ (k) d'espérance mathématique telle que :
$$E(X_{I\pi(3)}(k))\approx\frac{p_{iI\pi(3)}}{p_{iI}}\times\frac{1}{2}\times(\frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(3)}})^2\times E(X_Ir(k))\approx\frac{1}{2}\times\frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(3)}}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$
Donc :
$$E(X_{I\pi(3)}(k))\approx\frac{3}{4}\times\frac{k}{(Log(k)^2)}=C_{I\pi(3)}(k)\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$
On obtient donc un équivalent de $E(X_{I\pi(3)}(k))$ en multipliant $E(X_I(k))$, (ou $k/(Log(k))^2$) par ¾, c'est-à-dire 0.75.
On remarque CIπ(3) (k)=0.75 est proche de $C_2\approx0.66$, où C_2 est la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood [(5)(7)] .
On voit donc que dans le nouveau modèle MIπ(3), on doit s'attendre à trouver des bandes situées en dessous de la courbe $(k,k/(Log(k))^2)$, contrairement aux modèles MI et MI(k), et effectivement on observe que la courbe $(k,k/(Log(k))^2)$ est très voisine de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach (légèrement au dessus).

On pourrait se demander ce que donnerait le modèle MIπ(5) analogue au modèle MIπ(3), utilisant l'ensemble $I_\pi(5)$ de la même façon qu'on a utilisé l'ensemble $I_\pi(3)$.
En procédant de la même façon que précédemment, considérant un naturel k n'ayant aucun diviseur premier autre que 2, on obtient que k doit être congru à 2,4,6 ou 8 modulo 10. De plus les éléments de $I_\pi(5)$ sont ceux congrus à 1,3,7,9 modulo 10.
Si par exemple k est congru à 2 modulo 10, on obtient que pour i dans $I_\pi(5)$, k-i est congru à 1,9,5,3 modulo 10, et donc un terme sur 4 de la somme $S_{I\pi(5)}(k)$ (exactement analogue à $S_{I\pi(3)}(k)$) est nul (ceux tels que k-i est congru à 5 modulo 10).(On vérifie qu'on obtient le même résultat si k congru à 4,6 ou 8 modulo 10).
On obtient donc des propriétés complètement analogues à celles a)b)c) du modèle MIπ(3), et donc :

$$E(X_{I\pi(5)}(k) \approx \frac{3}{4}\times\frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(5)}}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=\frac{15}{16}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

L'effet de correction du modèle MIπ(5) est donc moindre que celui de MIπ(3).

Si on veut tenir compte des 2 modèles MIπ(3) et MIπ(5), on considère le modèle MIπ(3,5), utilisant l'ensemble $I_\pi(3,5)$, qu'on a défini comme l'ensemble des naturels impairs ni multiples de 3 ni multiple de 5.
Procédant comme précédemment, on considère un naturel k tel que k n'ait aucun diviseur premier autre que 2. Donc k est congru à un des naturels 2,4,8,14,16 ,22,24,26 ou 28 modulo 30. Prenons par exemple k congru à 28 modulo 30.
De plus, $I_\pi(3,5)$ contient les naturels congrus à un des naturels 1,7,11,13,17,19,23 ou 29 modulo 30. Donc $p_{iI\pi(3,5)}=8/30$.
Pour i dans $I_\pi(3,5)$, on obtient donc k-i congru à un des naturels 27,21,17,15,11,9,5,29. Donc 5/8 des termes de $S_{I\pi(3,5)}(k)$ s'annulent. (Ceux pour lesquels k-i est congru à 27,21,15,9 et 5 modulo 30).
Il en résulte que 5/8 des termes de $S_{I\pi(3,5)}(k)$ s'annulent. Utilisant donc des propriétés analogues aux propriétés a)b)c) du modèle MIπ(3), on obtient avec des notations analogues :

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx \frac{3}{8}\times\frac{30}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=\frac{90}{128}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

On remarque :

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx \frac{90}{128}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=(1-\frac{1}{(3-1)^2})(1-\frac{1}{(5-1)^2})\frac{k}{(Log(k))^2}$$

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx C_{I\pi(3,5)}(k)\frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $C_{I\pi(3,5)}(k)$ très proche de C_2, C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood.
On rappelle que d'après cette Conjecture [(5) (7)] :

$$r(k) \approx 2C_2\prod_{p/k,p\geq 3}(\frac{p-1}{p-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}\text{, avec :}$$

$$C_2=\prod_{p\geq 3}(1-\frac{1}{(p-1)^2})\cong 0{,}66$$, p désignant un nombre premier dans les expressions précédentes.

On a vu en introduction qu'elle était fausse, mais il semble que sa variante obtenue en supprimant le facteur 2 soit vraie, et puisse être extrêmement approchée par le propositions obtenues par la TAN concernant la modélisation statistique de r(k).

Considérons maintenant le modèle dans lequel k a plusieurs diviseurs mais n'est pas divisible par 3. On note alors I(k)π(3) l'ensemble I(k)∩Iπ(3), et MI(k)π(3) le modèle analogue au modèle MIπ(3) s'appliquant aux naturels k pairs non divisibles par 3.

Dans le modèle MI(k), on a écrit r(k) sous la forme, de façon analogue au modèle MI :
$r(k)=C_{I(k)}(k)+S_{I(k)}(k)$, avec :

$$S_{I(k)}(k) = \sum_{i\in I(k),500<i<k/2} f_A(i) f_A(k-i) \quad .$$

Dans le modèle MI(k)π(3), de façon analogue au modèle MIπ(3), on considère seulement les termes de SI(k)(k) qui ne sont pas multiples de 3.On obtient la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$:

$$S_{I(k)\pi(3)}(k) = \sum_{i\in I(k)\pi(3),500<i<k/2} f_A(i) f_A(k-i) \quad .$$

Considérant l'ensemble I(k)π(3), on obtient comme précédemment que la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ ne comporte que la proportion $p_{iI(k)\pi(3)}/p_{iI}$ des termes de $S_I(k)$.
D'autre part, puisque k n'est pas divisible par 3, on a toujours k congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6.

Supposons $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$. On a alors $I(k)\pi(3)=I_\pi(3,p_{1k},\ldots,p_{nk})$. Soit $n_1(k,3)/n(k,3)$ la proportion des éléments de $\mathbf{N}/6p_{1k}..p_{nk}\mathbf{N}$ congrus à 1 modulo 6, et $n_5(k,3)/n(k,3)$ la proportion de ceux congrus à 5 modulo 6. On obtient alors que la proportion $n_5(k,3)/n(k,3)$ des termes de $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ sont nuls, car pour i congru à 5 modulo 6, alors k-i=2-5 congru à 3 modulo 6 et donc n'est pas premier. Dans tous les exemples considérés, on aura :

$$\frac{n_1(k,3)}{n(k,3))} = \frac{n_5(k,3)}{n(k,3)} = \frac{1}{2}$$

De plus, si on considère un terme non nul de cette somme correspondant à i, on sait que i appartient à I(k)π(3), et donc on peut écrire $f_A(i)$ sous la forme $f_{A/I(k)\pi(3)}(i)$. De plus on sait que k-i appartient à I(k) (car i appartient à I(k)), et k-i appartient à $I_\pi(3)$. (Puisque k-i est congru à 1 modulo 6). Il en résulte que k-i appartient à I(k)π(3), et donc on peut écrire tout terme non nul de la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ sous la forme $f_{A/I(k)\pi(3)}(i)f_{A/I(k)\pi(3)}(k-i)$.

Il en résulte qu'on obtient des propriétés totalement analogues aux propriétés a)b)c) du modèle MIπ(3), dont on déduit que la modèle MI(k)π(3) prévoit que r(k) est modélisé par la variable aléatoire $X_{I(k)\pi(3)}r(k)$, avec :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{p_{iI(k)\pi(3)}}{p_{iI}} \times \frac{n_1(k,3)}{n(k,3)} \times (\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)\pi(3)}})^2 \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)\pi(3)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

D'après l'expression d'un équivalent de $E(X_{I(k)}r(k))$, on voit qu'on obtient un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(3)}(k)$ en multipliant $E(X_{I(k)}r(k))$ par le coefficient $c_{I(k)\pi(3)}(k)=0.5\ p_{iI(k)}/p_{iI(k)\pi(3)}(k)$.
Car on a vu :

$$E(X_{I(k)}r(k)) \approx \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} \times \frac{k}{(Log(k)^2)}$$

Donnons quelques exemples numériques :
Dans le cas où $I(k)=I_\pi(5)$ (k n'a que 5 et 2 pour diviseurs premiers.), on obtient que $I_\pi(5)$ contient l'ensemble des naturels congrus à 1,3,7,9 modulo 10, et donc on a alors $p_{iI(k)}=4/10$.
On a alors $I(k)\pi(3)=I_\pi(3,5)$, et donc I(k)π(3) contient les naturels congrus à 1,7,11,13,17,19,23,29 modulo 30, donc $p_{iI(k)\pi(3)}=8/30$.
On obtient le coefficient :

$$c_{I(k)\pi(3)}(k) = \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI(k)}}{p_{iI(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{8} \times \frac{2}{5} = 0.75$$

On obtient donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{3}{4}\times\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}}\times\frac{k}{(Log(k))^2} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(5)\times(\frac{5-1}{5-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(5) = (1-\frac{1}{(3-1)^2})\times(1-\frac{1}{(5-1)^2}) \cong C_2$$

La prédiction du modèle MI(k)π(3) dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Dans le cas où I(k)=$I_\pi(7)$, on obtient que $I_\pi(7)$ contient les naturels congrus à 1,3,5,9,11,13 modulo 14, donc $p_{iI(k)}$ =6/14.
I(k)π(3)=Iπ(3,7) contient les naturels congrus à 1,5,11,13,17,19,23,25,29,31,37,41 modulo 42, et donc $p_{iI(k)\pi(3)}$ =12/42.
On obtient le coefficient :

$$\frac{1}{2}\times\frac{p_{iI(k)}}{p_{iI(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2}\times\frac{42}{12}\times\frac{6}{14} = 0.75$$

On obtient en procédant comme dans l'exemple précédent :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(7)\times(\frac{7-1}{7-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(7) = (1-\frac{1}{(3-1)^2})\times(1-\frac{1}{(7-1)^2}) \cong C_2$$

La prédiction du modèle MI(k)π(3) dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On voit que le modèle MI(k)π(3) a la même prédiction que le modèle MIπ(3) dans le cas où k n'a aucun autre diviseur premier que 2 (On a alors I(k)=I). Le coefficient était alors de 0.75, et on voit donc qu'en général ce coefficient $c_{I(k)\pi(3)}$ (k) semble être égal à 0.75.
Dans le cas où k est divisible par 3, le modèle MI(k)π(3) n'apporte aucune amélioration, car alors I(k) est inclus dans Iπ(3) et de plus k est congru à 0 modulo 6. On peut donc considérer que MI(k)π(3) coïncide dans ses prévisions avec MI(k) lorsque k est divisible par 3.

On observe que la courbe $(k,0.75/(Log(k))^2)$ (obtenue dans le modèle MI(k)π(3) dans le cas où k a 2 pour seul diviseur premier) semble être très proche de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach, par exemple:
$m_{I(k)\pi(3)}$ (10000)≈88, $m_{I(k)\pi(3)}$ (50000)≈ 320, $m_{I(k)\pi(3)}$ (75000)≈446, $m_{I(k)\pi(3)}$ (90000)≈518.
Avec $m_{I(k)\pi(3)}(k) = E(X_{I(k)\pi(3)}r(k))$

Pour vérifier la validité de MI(k)π(3), on peut considérer les nombres de la forme 2^n, avec n grand. On devrait obtenir $r(2^n)\approx m_{I(k)\pi(3)}(2^n)\approx 0.75\times 2^n/(nLog(2))^2$.

On pourrait ensuite étudier les naturels de la forme 2^n3^s, (avec s>1) qui n'ont que 3 pour seul diviseur premier autre que 2, et donc dont on peut facilement estimer $m_{I(k)\pi(3)}$ (k) qui est alors identique à $m_{I(k)}$ (k) comme on l'a vu.

Ce cas d'ailleurs est très intéressant : En effet, d'après ce qui précède, pour $I(k)=I_\pi(3)$:
$m_{I(k)}(k)\approx pi_I/p_{iI(k)}\ k/(Log(k))^2=1.5k/(Log(k))^2$.
On obtient alors utilisant cette expression :
$m_{I(k)}(50000)\approx 640$, $m_{I(k)}(75000)\approx 892$, $m_{I(k)}(90000)\approx 1037$.

On remarque dans le cas précédent:

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{3}{2}\times\frac{k}{(Log(k))^2} = (\frac{3-1}{3-2})\times(1-\frac{1}{(3-1)^2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(3)\times(\frac{3-1}{3-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Avec $C_{I(k)\pi(3)}(3)$ très proche de C_2. On retrouve que la prédiction dans cet exemple du modèle MI(k)π(3) est très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On observe que les points $(k,m_{I(k)}(k))$ pour $k=2^n3^s$ se trouvent très proches de l'une des bandes les plus froncées de la Comète de Goldbach, ce qui donc tend à confirmer la validité du modèle MI(k) (coïncidant MI(k)π(3) puisque k est divisible par 3). On rappelle qu'on peut aussi le tester en calculant $r(2^n3^s)$ pour certaines valeurs de s et de n, et en les comparant avec l'estimation de MI(k) donnée précédemment.

On voit donc que le modèle MI(k)π(3) conduit à obtenir pour tout k supérieur à 1002, que la fonction r(k) est modélisée par la variable aléatoire $X_{I(k)\pi(3)}r(k)$ définie précédemment. Ceci constitue une loi numérique aléatoire, qui est illustrée apparemment par certains tests.

Le modèle MI(k)π(3) prévoit notamment l'existence de bandes d'équation $f(k)=C_kk/(Log(k))^2$, comme on en observe sur la Comète de Goldbach. Ceci est dû aux 2 propriétés suivantes de $X_{I(k)\pi(3)}r(k)$:

a)$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_kk/(Log(k))^2$, où C_k est une constante dépendant des diviseurs premiers de k.

b)On obtient utilisant l'inégalité de Chebychev que les intervalles de confiance minimaux à 95% (ou de façon évidente 99,9%) de $X_{I(k)\pi(3)}r(k))$, notés $[miG_{I(k)\pi(3)}(k), MaG_{I(k)\pi(3)}(k)]$ sont tels que $(MaG_{I(k)\pi(3)}(k)-miG_{I(k)\pi(3)}(k))/E(X_{I(k)\pi(3)}r(k))$ tend vers 0 pour k tend vers l'infini.

Il apparaît donc que le modèle MI(k)π(3) entraîne des prédictions remarquables concernant l'aspect de la Comète de Goldbach. De la même façon qu'on a défini les modèles MI(k)π(3) et MI(k)π(3,5), on peut définir le modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ où $p_1,\ldots,p_n$ sont les n premiers nombres premiers consécutifs après 2. Il est évident que dans tout modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on peut obtenir par des pseudo-preuves aléatoires des propositions $P(I_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(k),q)$ analogues aux propositions P(I(k),q) obtenues dans le modèle MI. Comme on l'a remarqué en considérant les modèles MI(k)π(3) et MI(k)π(3,5), il semble que les modèles $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ permettent d'obtenir des propositions qui tendent quand n tend vers l'infini vers la variante de la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood, obtenue en supprimant un facteur 2 dans la Conjecture initiale.

On pourrait montrer ceci explicitement, en montrant que si $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{sk})$, alors dans le modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on obtient :

$$E(X_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(p_{1k},\ldots,p_{sk})\prod_{i=1}^{s}(\frac{p_{ik}-1}{p_{ik}-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $C_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(p_{1k},\ldots,p_{sk})$ tend vers C_2 quand n tend vers l'infini. On a vérifié que ceci était en accord avec tous les exemples numériques considérés. Ceci se ramène donc apparemment à un problème résoluble par la Théorie des nombres classiques.

Pour le montrer, on utilisera le Théorème :

THEOREME 4.B.6Ba)) :

Si $p_1,\ldots,p_n$ sont n naturels premiers et $A(p_1,\ldots,p_n)=\{1,\ldots,2p_1\ldots p_n\}$ (C'est-à-dire A est l'ensemble des naturels de $[1,2p_1\ldots p_n]$), si $p(A(p_1,\ldots,p_n))=\{$i appartenant à $A(p_1,\ldots,p_n)$ tel que i n'est divisible par aucun des nombres $2,p_1,\ldots,p_n\}$ alors :
$Card(p(A(p_1,..,p_n))=(p_1-1)\times\ldots\times(p_n-1)$.

Démonstration (par récurrence) :

Si n=1 :
$A(p_1)=\{1,\ldots,2p_1\}$.
Les éléments de $A(p_1)$ non divisibles par 2 sont les éléments de $\{1,\ldots.,2p_1-1\}$ au nombre de p_1. Parmi ceux-ci, seul le naturel p_1 est divisible par p_1.
Donc $Card(p(A(p_1))=p_1-1$.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour n-1. Soit alors $p_1,\ldots.,p_n$ n nombres premiers.
On définit alors $p(A(p_1,\ldots.,p_{n-1}))=\{h_{1,n-1},\ldots.,h_{s,n-1}\}$, avec $s=Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.
Les éléments de $A(p_1,\ldots.,p_n)$ qui ne sont pas divisibles par $2,p_1,\ldots,p_{n-1}$ sont ceux congrus à $h_{1,n-1},\ldots,h_{s,n-1}$ modulo $2p_1\ldots p_{n-1}$, et donc sont les éléments de l' ensemble : $\{h_{1,n-1},\ldots.,h_{s,n-1},\ 2p_1\ldots p_{n-1}+h_{1,n-1},\ldots,2p_1\ldots p_{n-1}+h_{s,n-1},\ldots.,2p_1\ldots p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},.,2p_1\ldots p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$.
L'ensemble précédent a de façon évidente $p_nCard(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$ éléments.
De plus les éléments de l'ensemble précédent divisibles par p_n sont de la forme ap_n, avec a n'est pas divisible par $2,p_1,\ldots,p_{n-1}$, c'est-à-dire a appartient à $p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$. Il y en a donc un nombre égal à $Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$
Il en résulte que $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ qui est l'ensemble précédent privé de ses éléments divisibles par p_n a un nombre d' éléments égal à $(p_nCard(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1})))-Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$ c'est-à-dire $(p_n-1)Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.
On a donc montré par récurrence le Théorème.

Une conséquence immédiate de ce Théorème est le Corollaire :

COROLLAIRE 4.B.6Bb) :

Si on a $I(k)=I_\pi(p_1,\ldots.,p_n)$, alors :

$$p_{iI(k)}=\frac{1}{2}\times\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p_j-1}{p_j}\right).$$

La démonstration est immédiatement conséquence du Théorème précédent si on considère les naturels modulo $2p_1\ldots p_n$.

REMARQUE 4.B.6Bc) :

On a vu que dans le modèle MI(k) on avait :

$$E(X_{I(k)}r(k))\approx\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Utilisant le Corollaire précédent, on obtient, si $I(k)=I_\pi(p_1,\ldots,p_n)$:

$$\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}}=\prod_{j=1}^{n}\frac{p_j}{(p_j-1)}=\prod_{j=1}^{n}\frac{p_j-1}{p_j-2}\times\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(p_j-1)^2}\right)$$

On voit que cette expression est proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.
Ce qui précède permet de comparer les prédictions du modèle MI(k) avec la variante de la Conjecture d Hardy et Littlewood. Pour comparer celle-ci avec le modèle plus précis $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on procède comme suit :

Montrons le Théorème :

THEOREME 4.B.6Bd) :

Si k est un naturel pair de $A(p_1,\ldots,p_n)$ (défini plus haut de même que $p(A(p_1,\ldots,p_n))$, divisible par aucun des nombres premiers $p_1,..,p_n$, si on pose :
$d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n))=\{i/$ i et k-i n'est divisible par aucun des naturels $p_1,\ldots,p_n)\}$
Alors $Card(d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n)))=(p_1-2)\ldots(p_n-2)$.

Démonstration (Par récurrence) :

Montrons d'abord le Lemme :
LEMME 4.B.6Be) :

k étant un élément quelconque de $A(p_1,\ldots,p_n)$, l'ensemble des éléments de $A(p_1,\ldots,p_n)$ congrus à k modulo p_n, contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/(2p_1..p_{n-1})\mathbf{N}$, et est égal à l'ensemble de ces représentants.

Démonstration :

Soit k dans $A(p_1,\ldots,p_n)$. (On rappelle $A(p_1,\ldots,p_n)=\{1,\ldots,2p_1\ldots p_n\}$)
On suppose k congru à k_n modulo p_n, avec k_n dans $\{1,\ldots,p_n\}$.
L'ensemble des naturels de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à k modulo p_n est donc l'ensemble des naturels k_n+ap_n avec a naturel appartenant à $[0,2p_1\ldots p_{n-1}-1]$. Il a donc $2p_1\ldots p_{n-1}$ éléments.
Supposons qu'un de ces naturels k_n+ap_n différent de k_n soit congru à k_n modulo $2p_1\ldots p_{n-1}$.
Alors on a $ap_n=2\lambda p_1\ldots p_{n-1}$.(Avec $\lambda>0$).
Comme p_n est premier avec $2,\ldots,p_{n-1}$, p_n divise λ, donc $\lambda=sp_n$, s étant un naturel non nul, et donc $a=2sp_1\ldots p_{n-1}$.
Ceci est impossible car $a<2p_1\ldots p_{n-1}$.

Donc aucun des naturels de la forme k_n+ap_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$ n'est congru à k_n modulo $2p_1\ldots p_{n-1}$.
Il est évident qu'on arrive de la même façon au même résultat pour tout naturel k_n+ap_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$, c'est-à-dire qu'aucun des naturels k_n+bp_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$ n'est congru à k_n+ap_n modulo $2p_1..p_{n-1}$ si $a\neq b$.
Or on sait que le nombre d' éléments de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_{n-1}\mathbf{N}$ est égal à $2p_1\ldots p_{n-1}$, c'est-à-dire au nombre de naturels s'écrivant k_n+ap_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$.
Il en résulte que l'ensemble des éléments de $A(p_1,\ldots p_n)$ congrus à k modulo p_n (C'est-à-dire des naturels de la forme k_n+ap_n) contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_{n-1}\mathbf{N}$, et est égal à l'ensemble de ces représentants.
On a donc démontré le Lemme.

Montrons le Théorème pour n=1 :
On a ,p_1 étant un nombre premier, $A(p_1)=\{1,\ldots,2p_1\}$.
$p(A(p_1))=\{1,..,2p_1-1\}$(sans p_1), et a p_1-1 éléments.
Si k est un naturel pair de $A(p_1)$ non divisible par p_1, on a k=2s, avec $s\neq p_1$, et ou bien $1<k<p_1$, ou bien $p_1<k<2p_1$.
Si j appartient à $p(A(p_1))$, k-j=2s-j est impair et donc n'est pas divisible par 2.
De plus k-j est divisible par p_1 si $k-j=\alpha p_1$, α étant un entier, c'est-à-dire $j=k-\alpha p_1$.
Si $1<k<p_1$, il y a une seule solution j dans $p(A(p_1))$:$j=k+p_1$.
Si $p1<k<2p_1$, il y a une seule solution j dans $p(A(p_1))$:$j=k-p_1$.
Puisqu'on a défini $d_k(p(A(p_1))$ comme l'ensemble des naturels i de $p(A(p_1))$ tels que k-i non divisible par 2 ni par p_1, on a donc :
$Card(d_k(p(A(p_1)))=p_1-2$. (Car $d_k(A(p_1)))$ est constitué de $p(A(p_1))$ privé de j).
On a donc démontré le Théorème pour n=1.

Supposons qu'on ait démontré le Théorème pour $d_k(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1})))$.
On a vu qu'on pouvait écrire :
$p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))=\{h_{1,n-1},\ldots,h_{s,n-1}\}$, avec $s=(p_1-1)\ldots(p_{n-1}-1)\}$.

On a vu que $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ était constitué de l'ensemble B défini par :
$B=\{h_{1,n-1},\ldots,h_{s,n-1},\ldots,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$
privé des naturels de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.
k étant un naturel pair de $A(p_1,..,p_n)$ divisible par aucun des naturels $p_1,..,p_n$, on rappelle que $d_k(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1})))$ est l'ensemble des éléments i de $p(A(p_1,..p_{n-1}))$ tel que k-i n'est divisible par aucun des naturels $p_1,\ldots,p_{n-1}$.
Soit $d_k(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1})))=\{t_{1,n-1},\ldots,t_{r,n-1}\}$, avec $r=(p_1-2)\ldots(p_{n-1}-2)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Soit $C=\{t_{1,n-1},\ldots,t_{r,n-1},\ldots,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+t_{1,n-1},..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+t_{r,n-1}\}$.
C est donc l'ensemble des éléments i de B tel que k-i ne soit pas divisible par un des naturels $p_1,\ldots p_{n-1}$.
Il est évident $Card(C)= p_nr =p_n(p_1-2)\ldots(p_{n-1}-2)$.
On a défini $d_k(p(A(p_1,\ldots p_n)))$ comme étant l'ensemble des naturels i de $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ tel que k-i ne soit divisible par aucun des naturels premiers $p_1,\ldots,p_n$.
Donc $d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n))$ est inclus dans C, car tout élément i de $d_k(p(A(p_1,..p_n)))$ appartient à B et est tel que k-i n'est divisible par aucun des naturels $2,p_1,\ldots,p_{n-1}$.
De plus tout élément i de C tel que :
-i n'est pas de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.
-k-i n'est pas divisible par p_n.
est tel que i appartient à $d_k(p(A(p_1,..,p_n)))$, car alors i appartient à $p(A(p_1,\ldots,p_n)$ et k-i n'est divisible par aucun des naturels $p_1,\ldots,p_n$.
Donc si on définit les ensembles D et E par :
$D=\{i/$ i appartient à C et k-i est divisible par $p_n\}$
$E=\{i/$ i appartient à C et i est de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))\}$
On a alors $d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n)))=C/(DUE)$.
De plus si i appartient à E, alors i n'appartient pas à D puisque k n'est pas divisible par p_n. Donc D et E ont une intersection vide, et donc :
Card(C/(DUE))=Card(C)-Card(D)-Card(E).
Or D est l'ensemble des naturels i de $A(p_1,\ldots,p_n)$ congrus à k modulo p_n, tel que i ne soit pas divisible par $p_1,\ldots,p_{n-1}$ et que de plus k-i ne soit pas divisible par $p_1,\ldots,p_{n-1}$.
Appliquant le Lemme 4B6Be) et d'après l'hypothèse de récurrence, le nombre d'éléments de D est donc :
$Card(D)=Card(d_k(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))))=(p_1-2)\ldots(p_{n-1}-2)$.
De même, E est l'ensemble des naturels i de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à p_n modulo p_n et tel que i soit divisible par aucun des nombres $p_1,\ldots,p_{n-1}$ de même que k-i. Appliquant le Lemme 4B6Be) et d'après l'hypothèse de récurrence :
$Card(E)= Card(d_k(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))))=(p_1-2)\ldots(p_{n-1}-2)$.
Finalement, on obtient :
$Card(d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n)))=p_n (p_1-2)\ldots(p_{n-1}-2)- (p_1-2)\ldots(p_{n-1}-2)- (p_1-2)\ldots(p_{n-1}-2)$.
Donc $Card(d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n)))=(p_1-2)\ldots(p_n-2)$.
On a donc démontré le Théorème 4.B6Bd).

On peut à partir du Théorème précédent obtenir une expression donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par tout modèle $MI_\pi(p_1,\ldots,p_n)$, qui on l'a vu prédit la même expression que $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ lorsque k a 2 pour unique diviseur premier. On obtient cette expression dans l'exemple suivant :

EXEMPLE 4.B6Bf) :

Soit $p_1,\ldots,p_n$ n nombres premiers consécutifs après 2, et k un naturel n'ayant aucun diviseur autre que 2 (I(k)=I).
On a vu que dans le modèle $MI\pi(p_1,\ldots,p_n)$ (qui dans ce cas avait la même prédiction que le modèle $MI(k)\pi(p_1,..,p_n)$), on obtenait, généralisant le modèle $MI\pi(3)$:

$$E(X_{I\pi(p1,..,pn)}r(k)) \approx \frac{n_{dk}(p_1,\ldots,p_n)}{n(p_1,\ldots,p_n)} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(p1,\ldots,pn)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $n_{dk}(p_1,\ldots,p_n)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_n\mathbf{N}$ tels que k-i ne soit divisible par aucun des nombres $p_1,\ldots,p_n$, et $n(p_1,\ldots,p_n)$ est le nombre d'éléments de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_n\mathbf{N}$.

D'après les Théorèmes 4.B6Ba)b)d), on obtient :

$$E(X_{I\pi(p1,....,pn)}r(k)) \approx$$

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{(p_j-2)}{(p_j-1)}\times\prod_{j=1}^{n}\frac{(p_j-1)}{(p_j-2)}\times\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_j-1)^2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I\pi(p1,..,pn)}r(k)) \approx \prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_j-1)^2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Cette expression tend bien vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Pour obtenir l'expression générale donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par un modèle MI(k)π($p_1,\ldots,p_n$), on utilise aussi le Théorème suivant :

THEOREME 4B6Bg) :

Si $p_1,\ldots,p_n$ sont n nombres premiers et $q_1,\ldots,q_r$ sont r nombres premiers différents de $p_1,\ldots,p_n$, k étant un naturel pair non divisible par $p_1,\ldots,p_n$ alors le nombre d'éléments de l'ensemble $d_{k(p1,..,pn)}$ (p(A($p_1,\ldots,p_n,q_1,..,q_r$))) dont les éléments sont les éléments i de p(A($p_1,\ldots,q_r$)) tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$ est égal à $(q_1-1)\ldots.(q_r-1)(p_1-2)\ldots(p_n-2)$.
(Et donc la proportion des éléments i de p(A($p_1,\ldots,q_r$)) tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$ est la même que celle des éléments j de p(A($p_1,\ldots,p_n$)) tels que k-j n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$, d'après les Théorèmes 4B6Ba) et 4B6Bd).

Démonstration (Par récurrence) :

Soit k, naturel pair non divisible par $p_1,..,p_n$.
On suppose r=1.
Soit p(A($p_1,\ldots,p_n$))=$\{h_{1,n},\ldots,h_{s,n}\}$.
L'ensemble des éléments de A($p_1,..,p_n,q_1$} non divisibles par $p_1,..p_n$ est donc :
B=$\{h_{1,n},\ldots h_{s,n},p_1\ldots p_n+h_{1,n},..,p_1..p_n+h_{s,n},..,p_1..p_n(q_1-1)+h_{1,n},..,p_1..p_n(q_1-1)+h_{s,n}\}$
Parmi ceux-ci, d'après le Théorème 4B6Bd), il y a $q_1(p_1-2)..(p_n-1)$ éléments i tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$.
Soit C l'ensemble de ces éléments.
L'ensemble $d_{k(p1,\ldots,pn)}$ (p(A($p_1,\ldots,p_n,q_1$))) est donc constitué des éléments i de C tels que :
a)i n'est pas divisible par q_1.
b)k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$.
La condition b) est vérifiée pour tous les éléments de C.
De plus, utilisant le Lemme 4B6Be), si D={i/ i appartient à C et i=aq_1 pour un naturel a}, on sait que l'ensemble des naturels de A($p_1,..,p_n,q_1$) congrus à q_1 modulo q_1 contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_n\mathbf{N}$, et est constitué de ces représentants, et donc D est constitué de chaque représentant i appartenant à p(A($p_1,..,p_n$)) et tel que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$. D'après le Théorème 4B6Bd), ce nombre est égal à $(p_1-2)..(p_n-2)$.
On a donc :
Card($d_{k(p1,..,pn)}$ (p(A($p_1,..,p_n,q_1$)))=Card(C)-Card(D)=$(q_1-1)(p_1-2)..(p_n-2)$.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $d_{k(p1,..pn)}$ (p(A($p_1,..,p_n,q_1,..,q_{r-1}$))).
On procède alors exactement comme dans le cas r=1 :

Soit $p(A(p_1,\ldots,q_{r-1}))=\{h_{1,n,r-1},\ldots,h_{s,n,r-1}\}$
L'ensemble des éléments de $A(p_1,\ldots,q_r)$ non divisibles par $p_1,..,q_{r-1}$ est donc :
$B=\{h_{1,n,r-1},\ldots h_{s,n,r-1},p_1\ldots p_n.q_1..q_{r-1}+h_{1,n,r-1},.,p_1..p_n\ldots q_{r-1}+h_{s,n,r-1},..,p_1..p_n..q_{r-1}(q_r-1)+h_{1,n,r-1},..,p_1..p_n..q_{r-1}(q_r-1)+h_{s,n,r-1}\}$
Parmi ceux-ci, d'après l'hypothèse de récurrence il y a $q_r(q_1-1)\ldots(q_{r-1}-1)(p_1-2)..(p_n-1)$ éléments i tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$.
Soit C l'ensemble de ces éléments.
L'ensemble des éléments i de $p(A(p_1,..,q_r))$ tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$ (Cest à dire les éléments de $d_{k(p1,..,pn)}(p(A(p_1,..,p_n,\ldots,q_r)))$ est donc constitué des éléments i de C tels que :
a)i n'est pas de la forme aq_r.
b)k-i n'est pas divisible par $p_1,\ldots,p_n$.
Comme dans le cas r=1, la condition b) est toujours vérifiée.
Si on pose D={i appartenant à C, et $i=aq_r$}, on obtient exactement comme dans le cas r=1 utilisant le Lemme 4B6Be) que le nombre d'éléments de D est égal à, d'après l'hypothèse de récurrence :
$Card(D)=Card(d_{k(p1,..,pn)}(p(A(p_1,..,p_n,\ldots q_{r-1}))))= (q_1-1)\ldots(q_{r-1}-1)(p_1-2)..(p_n-1)$.
Finalement :
$Card(d_{k(p1,..,pn)}(p(A(p_1,..,p_n,\ldots q_r))))=Card(C)-Card(D)= (q_1-1)..(q_r-1)(p_1-2)..(p_n-2)$.
On a donc montré le Théorème.

D'après ce qui précède, on obtient facilement l'expression donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par un modèle quelconque $MI(k)\pi(p_1,..,p_n)$, avec $I(k)=I_\pi(t_1,\ldots,t_r)$, c'est-à-dire $t_1,..,t_r$ sont les diviseurs premiers de k autres que 2. De même qu'on a vu que si k était divisible par 3 la prédiction de $MI(k)\pi(3)$ était la même que celle de MI(k), on peut considérer que si k a $t_1,\ldots t_r$ pour facteurs premiers autres que 2, alors la prédiction de $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ est celle de $MI(k)\pi(q_1,\ldots,q_s)$, où $q_1,\ldots,q_s$ sont les éléments de $\{p_1,..,p_n\}$ différents de $t_1,\ldots,t_r$.
On obtient alors facilement la prédiction de $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, utilisant les résultats de la Remarque 4B6Bc), ceux de l'Exemple 4B6Bf) et le Théorème 4B6Bg) :

$$E(X_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,..,pn)}(t_1,\ldots,t_r)\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$, avec :

$$C_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(t_1,..,t_r)=\prod_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{(q_i-1)^2})\times\prod_{j=1}^{r}(\frac{t_j-1}{t_j-2})\times(1-\frac{1}{(t_j-1)^2})$$

On voit donc que cette expression tend asymptotiquement vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On obtient alors, procédant exactement comme dans l'Etude de la fonction r(k) par le modèle simple MI 4B6A) une proposition $P2_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(r(k))$ analogue à la proposition $P2_{MI}(r(k))$ donnant une estimation de r(k) obtenue par le modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$. Dans cette proposition la fonction r(k) est définie sur le sous-ensemble $F(t_1,\ldots,t_r)$ de **N** contenant les multiples pairs de $t_1,\ldots,t_n$ supérieurs à $2N_A=1002$. Et on a dans cette proposition :
$E(X_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}r(k))\approx C_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(t_1,\ldots,t_r)k/(Log(k))^2$.

Il faudrait vérifier si cette variante est bien en accord avec la Comète de Goldbach. Si tel n'était pas le cas, cela signifierait qu'il faut trouver des modèles plus précis que les modèles du type $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$. Il est très vraisemblable qu'on ne puisse jamais démontrer, utilisant seulement la Théorie des Nombres classiques des propositions analogues à celles qu'on obtient par la TAN décrivant la Comète de Goldbach utilisant les modèles $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ et donc en particulier la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood, tout comme la Conjecture faible de Goldbach.

De la même façon que le modèle MI est analogue au modèle équiprobable $M_{eq}I$ exposé dans l'article (5), et qu'on a défini un modèle $M_{eq}I\pi(p_1,\ldots,p_n)$ analogue au modèle indépendant $MI\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on peut définir un modèle équiprobable $M_{eq}I(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ analogue au modèle indépendant $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$. On obtient facilement en procédant comme pour le modèle $M_{eq}I$, que chaque modèle indépendant et son analogue équiprobable ont une espérance équivalente quand k tend vers l'infini.

En réalité, la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood ne représente qu'approximativement les propriétés de la Comète de Goldbach pour k dans [5000,100000]. En effet d'après cette variante, on devrait trouver sur la Comète des points se rapprochant tangentiellement une de la courbe $(k,r_{min}(k))$ avec $r_{min}(k)=0.66k/(Log(k))^2$ correspondant aux naturels ayant 2 pour seul diviseur premier ou 2 et quelques autres diviseurs premiers grands. Or sur la comète de Goldbach, la courbe minimale observée présente une ordonnée nettement plus élevée que la courbe $y(k)=0.66k/(Log(k))^2$ (environ 15% en plus). On pourrait en conclure que le modèle $MI(k)\pi(p_1,..p_n)$ n'est pas assez précis puisqu'il conduit à obtenir la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood qui n'est pas illustrée par la Comète de Goldbach. Cependant, on peut interpréter cette différence de 15% d'une autre façon:

Comme on l'a vu dans l'Etude d'une fonction par la TAN 4A7a), on peut considérer que les tests illustrent partiellement la proposition $P2_{I(k)\pi(p1,...pn)}$ (r(k)), prenant $E(X_{I(k)\pi(p1,..,pn)}\ r(k))\approx C_{I(k)\pi(p1,..,pn)}\ k/(Log(k))^2$. Ainsi, on peut penser que les tests effectués ne déterminent pas r(k) pour k assez grand pour que soit illustrée la proposition $P2_{I(k)\pi(p1,...,pn)}$ (r(k)) bien que celle-ci soit vraie.

Ainsi, on remarque que pour k dans [10000,90000], 1/Log(k) est de l'ordre de 10%. De plus pour obtenir la variante de Hardy et Littlewood, on a obtenu un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(p1,...,pn)}r(k))$ en utilisant :

$$\sum_{i=500}^{k/2}\frac{1}{Log(k)Log(k-i)}\approx\frac{k/2}{(Log(k))^2}$$

Or pour obtenir cette équivalence, on utilise l'inégalité :

$$\sum_{i=500}^{k/2}\frac{1}{Log(k)Log(k-i)}\geq\frac{k/2-500}{(Log(k))^2}$$

Et donc il est possible qu'un équivalent plus précis de $E(X_{I\pi(p1,...,pn)}r(k))$ soit, utilisant une meilleure approximation du terme de gauche de l'inégalité précédente :

$$E(X_I r(k))\approx\frac{k}{(Log(k))^2}\times(1+\frac{\alpha}{Log(k)}+\frac{\beta}{(Log(k))^2}).$$

α et β étant 2 réels.

(On rappelle que pour obtenir $p_{iA}=1/Log(i)$ on utilise que A est un ensemble estimé d'estimation $a(n)=\int_{[2,n]}(1/Log(t))dt$, qui est la meilleure estimation simple de P(n), nombre de nombres premiers inférieurs à n).

Il est clair que pour k tend vers l'infini, 1/Log(k) tend vers 0, et donc on obtient bien une expression très proche de la variante de Conjecture de Hardy et Littlewood.

D'après ce qui précède, on peut obtenir une meilleure estimation de $E(X_{I(k)\pi(p1,..,pn)}$ (r(k)) en remplaçant dans la proposition précédente $P2_{I(k)\pi(p1,...,pn)}$ (r(k)) donnant un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(p1,..,pn)}$ (r(k)) $k/(Log(k))^2$ par l'intégrale $2\int_{[3,k/2]}(1/(Log(x)Log(k-x))dx$. (Ceci se justifie simplement si on a considéré que l'ensemble A des nombres premiers avait une évaluation probabiliste $p_{iA}=1/Log(i)$ pour i supérieur à $N_A=3$ au lieu de $N_A=501$)

Pour évaluer cette intégrale, on calcule la dérivée :

$$\frac{d}{dx}(\frac{x}{Log(x)Log(k-x)})$$

, et on intègre ensuite les 2 termes de l'égalité obtenue.

EXEMPLE 4.B.7 :CONJECTURE FORTE DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX

Etudions la Conjecture des nombres premiers jumeaux. Soit G l'ensemble des nombres p premiers tels que (p,p+2) soit un couple de nombres premiers. A étant l'ensemble des nombres premiers, on a pour tout naturel i, $f_G(i)=f_A(i)f_A(i+2)$. On sait de plus que A est inclus dans I l'ensemble des naturels impairs, mais plus précisément A est inclus dans K1 l'ensemble des naturels dont le carré est congru à 1 modulo 24.

On définit donc les ensembles suivants, i représentant toujours un naturel:
A={i / i premier}
H={i /i+2 premier}
On a donc G=A∩H.
K1 est l'ensemble des naturels i tels que i^2 est congru à 1 modulo 24. On a donc :
K1={i / i^2 congru à 1 modulo 24}. K1 est donc l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K1}, avec :
B_{K1}={1,5,7,11,13,17,19,23}.
On a donc A inclus dans K1.
De même :
K'1={i / $(i+2)^2$ congru à 1 modulo 24}. K'1 est donc l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de $B_{K'1}$, avec :
$B_{K'1}$={3,5,9,11,15,17,21,23}
On définit alors K2 :
K2={i / i^2 et $(i+1)^2$ sont congrus à 1 modulo 24}. On a donc K2=K1∩K'1. K2 est l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K2}, avec :
B_{K2}={5,11,17,23}.(Donc $B_{K2}=B_{K1}\cap B_{K'1}$).

Appliquant le pseudo-Axiome des ensembles estimés à A, comme dans l'exemple précédent, on obtient la modélisation :
Pour i supérieur à 501, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_A(i)$, avec p(« $Xf_A(i)=1$ »)=p_{iA} =1/Log(i)(1+ε(i)).
Il en résulte :
Pour i supérieur à 501, $f_H(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_H(i)$, avec p(« $Xf_H(i)=1$ »= p_{iH} $=p_{i+2A}$.
On sait que si i n'appartient pas à K2, $f_G(i)=0$ car G est inclus dans K2=K1∩K'1.
Si i appartient à K2, par définition de $f_{A/C}$, A et C étant 2 sous-ensembles de **N**, on a:
$f_{G/K2}(i)=f_{A\cap K2/K2}(i)f_{H\cap K2/K2}(i)$.

Utilisant le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés appliqué à (A,K2,K1), puis le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés à (A∩K2,K2), on obtient :
Pour i supérieur à 501, $f_{A\cap K2/K2}(i)$ est modélisée par $X_{A\cap K2/K2}(i)$, avec :
p(« $X_{A\cap K2/K2}(i)=1$ »)=$p_{iA}/p_{iK1}=3p_{iA}$.
De même, en procédant de la même façon pour H et K'1 :
Pour i supérieur à 501, $f_{H\cap K2/K2}(i)$ est modélisée par $X_{H\cap K2/K2}(i)$, avec :
p(« $X_{H\cap K2/K2}(i)=1$ »)=$p_{iH}/p_{iK'1}=3p_{i+2A}$.
Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes au couple ($X_{A\cap K2/K2}(i)$, $X_{H\cap K2/K2}(i)$), on obtient que ces variables aléatoires peuvent être considérées comme définies sur le même espace et indépendantes, et appliquant la propriété de correspondance on obtient :
Pour i appartenant à K2, « $f_{G/K2}(i)=1$ » est modélisée par l'évènement « $Xf_{G/K2}(i)=1$ », de probabilité $p_{iG/K2}=9p_{iA}p_{i+2A}$.
(On aurait pu obtenir le même résultat en écrivant :
G=G∩K2=(A∩K2)∩(H∩K2), puis en appliquant le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme à (A∩K2,H∩K2,K2), ce qui permet d'obtenir $p_{iG}=p_{iA\cap K2}p_{iH\cap K2}/p_{iK2}$ puis à (A,K2,K1), (H,K2,K'1), ce qui permet d'obtenir $p_{iA\cap K2}=p_{iA}\ p_{iK2}\ /p_{iK1}$ et $p_{iH\cap K2}=p_{iH}\ p_{iK2}\ /p_{iK'1}$ puis le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés à (G,K2)), ce qui permet d'obtenir $p_{iG/K2}=p_{iG}/p_{iK2}$, et finalement $p_{iG/K2}=p_{iA}p_{iH}/(p_{iK1}p_{iK'1})$.

Il en résulte, écrivant $G(n)=\sum_{i=1}^{499} f_G(i)+\sum_{i=501, i\in K2}^{n} f_G(i)$ et utilisant une variante immédiate du Théorème 4.A.7, que la proposition:
P(α(3)) :« G est un ensemble estimé d'estimation :

$$g(n)=\sum_{i=501,i\in K2}^{n} 9p_{iA}p_{i+2A} \approx 9p_{iK2}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=\alpha(3)\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$, avec α(3)=3/2»

a une pseudo-preuve aléatoire. (On justifiera plus loin la notation P(α(3)).
Nous verrons qu'il existe des modèles beaucoup plus précis que celui qu'on a utilisé.
Or on a montré plus généralement (On est dans le cas 1 de l'Etude d'une fonction par la TAN 4A7a)) que la proposition:
Q(α(3)) : « Il existe β tel que G est un ensemble estimé d'estimation g(n), avec:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{\alpha(3)(n/(Log(n))^2}\right)=\beta$$ »

a une pseudo-preuve aléatoire. Si cette proposition est illustrée par des tests, elle a une explication aléatoire intéressante car elle n'a jamais été démontrée classiquement. Comme on l'a vu dans l'Etude théorique 4.A7a), plus proche est la valeur observée β de 1, valeur prédite par le modèle supposé exact, meilleur est la qualité du modèle et plus intéressante est l'explication aléatoire. On remarque que Q(α(3)) entraîne la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux (G est infini) tout en étant illustrée par des tests si elle est vraie, et donc si Q(α(3)) est illustrée par des tests (traçant $g(k)/(k/(Log(k))^2)$, la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire intéressante, et aussi une explication aléatoire puisqu'elle n'a jamais été prouvée classiquement. On rappelle aussi qu'on peut définir une proposition Q(α(3),B1) plus précise que Q(α(3), en bornant le distance $|\beta-1|$ par B1).

On peut généraliser et améliorer le modèle présenté ici en l'améliorant en remarquant que K1 est l'ensemble des naturels congrus à 1 ou 5 modulo 6, c'est-à-dire l'ensemble $I_\pi(3)$ introduit dans l'Exemple 4.B.6 précédent. Ceci justifie la notation P(α(3)), avec α(3)=3/2. Il est évident qu'on peut obtenir une estimation de g(n) de façon analogue en remplaçant K1 par $I_\pi(p_1,\ldots,p_n)$ où $p_1,..,p_n$ sont les n nombres premiers consécutifs après 3. On obtient dans ce nouveau modèle une constante $\alpha(p_1,\ldots,p_n)$, telle que les propositions $P(\alpha(p_1,\ldots,p_n))$ et $P(\alpha(p_1,\ldots,p_n),\varepsilon)$ ont des pseudo-preuve aléatoires.
On rappelle que la Conjecture de Hardy et Litlewood concernant les nombres premiers jumeaux peut s'exprimer sous la forme $P(2C_2)$:
$P(2C_2)$: « G est un ensemble estimé d'estimation $g(n)=2C_2n/(Log(n))^2$ », C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Goldbach proposée par Hardy et Littlewood (voir Exemple 4.B6 précédent, $C_2\approx0.66$). Il en résulte, si les tests illustrent la validité de cette Conjecture, que la modèle MIπ(3) est de très bonne qualité considérant sa simplicité puisque 1.5 est très proche de 1 .32. (On remarque que ceci est encore plus manifeste si on écrit :
$$\frac{3}{2}=2\times\left(1-\frac{1}{(3-1)^2}\right)\cong 2C_2$$
On peut donc conjecturer que la constante $\alpha(p_1,\ldots,p_n)=\alpha_n$ définie plus haut tend vers la limite $2C_2$ (pour n tend vers l'infini). Si ceci est confirmé par des tests, ou est démontré utilisant la Théorie des Nombres classiques, il est clair que la Conjecture de Hardy et Littlewood pourra être approchée asymptotiquement par des propositions $P(\alpha_n)$ (C'est-à-dire α_n tend vers $2C_2$) ayant une pseudo-preuve aléatoire. On pourra obtenir explicitement la Conjecture elle-même en utilisant le pseudo-Axiome suivant :

PSEUDO-AXIOME 4.B.7a)(de la limite) :

Si on obtient des propositions $P(\alpha_i)$ ayant des pseudo-preuves aléatoires, $P(\alpha_i)$ dépendant seulement du réel α_i, et tel que la suite α_i tende vers la limite α_p, alors lorsque *le pseudo-Axiome de la limite* est valide pour la suite $(P(\alpha_i))$, alors $P(\alpha_p)$ est vrai.

Justification intuitive :

Ce pseudo-Axiome de la limite est évident intuitivement car d'après ses hypothèses on peut approcher d'aussi prés qu'on veut $P(\alpha_p)$ par des propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire.
On utilisera ce pseudo-Axiome de la limite quand les modèles Mi permettant d'obtenir les propositions $P(\alpha_i)$ sont de plus en plus précis.

En utilisant ce pseudo-Axiome de la limite, on voit que pour obtenir que la Conjecture des nombres premiers jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire, il suffit de montrer classiquement que $\alpha(p_1,\dots,p_n)$ tend vers $2C_2$ quand n tend vers l'infini. Ceci se ramène à un problème classique de la Théorie des nombres concernant les ensembles **N**/p**N**.

Pour résoudre ce problème, on peut montrer que le modèle $MI_\pi(p_1,\dots,p_n)$, obtenu en remplaçant K1 par $I_\pi(p_1,\dots,p_n)$ conduit à obtenir $\alpha_n=\alpha(p_1,\dots,p_n)$ tendant ver $2C_2$ de la façon suivante :
On pose maintenant :
$K1=I_\pi(p_1,\dots,p_n)$.
K'1={i dans **N** tel que i+2 appartient à K1}
$K2=K1\cap K'1$
En procédant exactement comme dans l'Exemple précédent avec $K1=I_\pi(3)$, on obtient que le modèle $MI_\pi(p_1,\dots,p_n)$ conduit à obtenir que la proposition:
$P(\alpha_n)$:« $g(n)\approx\alpha_n k/(Log(k))^2$, avec : $\alpha_n=\dfrac{p_{iK2}}{(p_{iK1})^2}=\dfrac{1}{p_{iK1}}\times\dfrac{p_{iK2}}{p_{iK1}}$ »
a une pseudo-preuve aléatoire.
On a déjà obtenu p_{iK1} dans le Corollaire 4B6Bb).
Pour calculer p_{iK2}, on doit calculer le nombre d'éléments i de $p(A(p_1,\dots,p_n)$ (défini dans l'Exemple précédent) tel que i+1 appartienne aussi à $p(A(p_1,\dots,p_n))$, identifiant $A(p_1,..,p_n)$ avec $\mathbf{N}/2p_1\dots p_n\mathbf{N}$.
Montrons alors le Théorème suivant :

THEOREME 4B7b) :

$p_1,..,p_n$ étant n nombres premiers consécutifs après 2, le nombre d'éléments i de $p(A(p_1,\dots,p_n))$ tel que i+2 appartient à $p(A(p_1,\dots,p_n))$ est égal à $(p_1-2)\dots(p_n-2)$.(Identifiant $A(p_1,\dots,p_n)$ avec $\mathbf{N}/2p_1,..,p_n\mathbf{N}$)
On notera $j_1(p(A(p_1,..,p_n)))$={i appartenant à $p(A(p_1,..,p_n)$ tel que i+2 appartient à $p(A(p_1,..,p_n))$} et $j_2(p(A(p_1,\dots,p_n)\}$= {i appartenant à $p(A(p_1,..,p_n))$ tel que i-2 appartient à $p(A(p_1,\dots,p_n))$.

Démonstration (par récurrence) :
Dans le cas où n=1, on est dans l'Exemple précédent, où on a vu :
$Card(j_1(p(A(3)))=Card(\{5\})=1=3-2$.
Donc le Théorème est vrai pour n=1.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $p(A(p_1,..,p_{n-1}))$.
On pose $j_1(p(A(p_1,\dots,p_{n-1})))=\{h_{1,n-1},\dots,h_{s,n-1}\}$
L'ensemble des éléments i de $A(p_1,\dots,p_n)$ tels que ni i ni i+2 ne sont divisibles par $p_1,..,p_{n-1}$ est donc :
$B=\{h_{1,n-1},\dots,h_{s,n-1},\dots,2p_1\dots p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},..,2p_1\dots p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$
D'après l'hypothèse de récurrence :
$Card(B)=p_n(p_1-1)\dots(p_{n-1}-1)$.
$j_1(p(A(p_1,\dots,p_n)))$ est constitué des éléments i de B tels que ni i ni i+2 ne sont divisibles par p_n, c'est-à-dire les éléments i de B qui :
a) ne sont pas de la forme $i=ap_n$.(a dans $A(p_1,\dots,p_{n-1})$)
b) ne sont pas tels que $(i+2) = ap_n$.

Si on pose :
C={i appartenant à B tel que $i=ap_n$, a naturel}
D={i appartenant à B tel que $(i+2)=ap_n$}
On a donc : $j_1(p(A(p_1,\dots,p_n)))=B/(CUD)$.

De plus il est évident que C et D ont une intersection vide.
D'autre part C est l'ensemble des naturels i de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à p_n modulo p_n, et tels que i n'est pas divisible par $p_1,\ldots,p_{n-1}$ ni i+2.
Et on a vu dans le Lemme4B6Be) que l'ensemble des naturels congrus à p_n modulo p_n dans $A(p_1,\ldots,p_n)$ contenait exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1..p_{n-1}\mathbf{N}$ et était égal à l'ensemble de ces représentants. C correspond donc à l'ensemble des naturels ap_n dont le représentant appartient à $j_1(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1})))$.
On en déduit $Card(C)=Card(j_1(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))))=(p_1-2)..(p_{n-1}-2)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
De même $Card(D)=Card(j_2(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))))=(p_1-2)..(p_{n-1}-2)$
On obtient bien :
$Card(j_1(p(A(p_1,..,p_n)))=Card(B)-Card(C)-Card(D)=(p_1-2)\ldots(p_n-2)$.

On déduit du Théorème précédent, pour $K1=I_\pi(p_1,\ldots,p_n)$:

$$p_{iK2}=\frac{(p_1-2)...(p_n-2)}{2p_1....p_n}$$

Et donc d'après le Corollaire 4B6Bb) donnant l'expression de p_{iK1} et celle donnée par la Remarque 4B6Bc) :

$$\alpha_n=\frac{p_{iK2}}{p_{iK1}}\times\frac{1}{p_{iK1}}=2\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_i-1)^2})$$

On obtient bien que α_n tend vers $2C_2$ pour n tend vers l'infini.

On voit donc qu'il est très possible que la Conjecture des nombres premiers jumeaux (forte et faible) ne puisse pas être prouvée de façon classique, mais seulement en utilisant la TAN comme pour la Conjecture de Goldbach.

REMARQUE 4.B.7c) :

On peut obtenir des résultats très intéressants en utilisant la Pseudo-Axiome 4.B.7a) de la limite :

Remarquant qu'on aurait pu dans la proposition P2(S(n)) de la Remarque 4.A.7b) remplacer 0.98 par n'importe quel réel p avec $0<p<1$, on obtient en appliquant le pseudo-Axiome 4B7a) de la limite que la proposition suivante, c'est à dire P1(S(n)) a une pseudo-preuve aléatoire:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n}p_{iA}})=1$$

On obtient donc que le Théorème 4.A.7) sans uiliser la Loi Forte des Grands Nombres généralisée.

De même, on remarque que dans la proposition $P2_{MI}(r(k))$ (Etude de la fonction r(k) par le modèle simple indépendant MI), on aurait pu remplacer 0.98 par n'importe quel réel p tel que $0<p<1$. D'après ce qui précède, on obtient donc que la proposition suivante $P2_{MIlim}(r(k))$ a une pseudo-preuve-aléatoire :

$P2_{MIlim}(r(k))$: « $\lim_{i\to\infty}(\frac{r(i)}{(i/(Log(i))^2})=1$ »

Appliquant le même raisonnement à la proposition $P2_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}$ r(k)) (Etude de la fonction r(k) par le modèle indépendant $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$) (On rappelle $p_1,\ldots,p_n$ sont les n premiers nombres premiers différents de 2), on obtient, i appartenant à l'ensemble $F(t_1,\ldots,t_r)$ contenant les naturels pairs ayant pour autres diviseurs premiers que 2 $t_1,..,t_r$, que la proposition suivante a une pseudo-preuve aléatoire:
$P_{MI(k)\pi(p1,..,pn)lim}$ (r(k)) : «

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{r(i)}{C_{I(k)\pi(p1,..,pn)}(t_1,..,t_r)(i/(Log(i))^2)}\right)=1 \text{ ».}$$

Or on a vu :

$$\lim_{n\to\infty}(C_{I(k)\pi(p1,...,pn)}(t_1,...t_r))=C_2\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{t_j-1}{t_j-2}\right)$$

On obtient donc, appliquant à nouveau le pseudo-Axiome 4.B7b) de la limite aux propositions $P_{MI(k)\pi(p1,..,pn)}$ pour n tend vers l'infini, que la proposition suivante $P_{H.L.G}$ a une pseudo-preuve aléatoire :

$P_{H.L.G}$: " $r(i)\approx C_2\prod_{j=1}^{r}\frac{t_j-1}{t_j-2}\times\frac{i}{(Log(i)^2)}$ "

5)INTERPRETATION DE LA T.A.N PAR LA TMP.

Dans un article précédent on a exposé la Théorie Mathématique Platoniste (TMP) permettant d'interprèter l'ensemble des théories mathématiques classiques de façon Platoniste. On a vu en effet que les théories mathématiques classiques pouvaient être identifiées à des *théories mathématiques Platonistes* (écrites sans majuscules et sans l'article défini "la").

La T.A.N peut être identifiée à une théorie mathématique Platoniste T_A sur un code Platoniste C_A, celle-ci étant appelée *Théorie mathématique Platoniste aléatoire des nombres* ou *Théorie Aléatoire des Nombres Platonistes*. Les hypothèses $H(C_A)$ de C_A contiennent la théorie des probabilités, elle-même identifiée à une théorie mathématique Platoniste sur un code Platoniste C_m, celle-ci étant appelée *Théorie mathématique Platoniste des probabilités*. C_m est le code Platoniste minimal, c'est à dire comme on l'a défini dans la TMP que $H(C_m)$ contient seulement les bases de la TMP.

Dans la théorie mathématique Platoniste aléatoire des nombres, on admet axiomatiquement que "est modélisée par" représente une unique relation non-floue qui peut exister entre une fonction d'un sous-ensemble F (fini ou infini) de **N** dans **N** (qui est un objet mathématique non-relationnel) et une séquence de variable aléatoire indexée sur F (qui est aussi un objet mathématique non-relationnel). Si on avait défini "est modélisée par" comme une relation entre "une proposition ayant une signification Platoniste" et un évènement d'un espace probabilisable, alors "est modélisée par" n'aurait pu être identifiée à une relation non-floue puisque "une proposition ayant une signification Platoniste" n'est pas une objet mathématique non-relationnel.

Alors, considérons dans un texte T la proposition (appelée "une loi numérique aléatoire" dans la T.A.N) de la forme:

P_i:"f(k) est modélisée par X(k)"

Ou de la forme :

P_i:"f est modélisée par $(X_i)_F$"

Avec f fonction d'un sous-ensemble F de **N** dans **N** et $(X(i))_F$ une séquence indexée sur F de variables aléatoires alors si les propositions la précédant dans T sont vraies la proposition P aura comme signification Platoniste d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C_A la proposition élémentaire Platoniste: P_{eli} :"est modélisée par(f,$(X(i))_F$)".

Considérons dans un texte T sur C_A une proposition H_i de la forme, les propositions précédant H_i dans T étant vraies:

H_i : « P est modélisée par Ev".

Avec P une proposition équivalente à une proposition Platoniste stable et Ev évènement d'un espace probabilisable (Ω,B,p).

Alors on définit la fonction f_P, de F={1} dans {0,1} telle que "f_P=1" est équivalent à "P est vraie", et on définit $X_P(1)$ comme une variable aléatoire sur (Ω,B,p) à valeurs dans{0,1} telle que "$X_P(1)$=1" est équivalent à "Ev".

Les définitions précédentes auront dans le code Platoniste C_A considéré comme signification Platoniste une proposition Platoniste stable (H_{eli1},H_{eli2}). D'après les règles syntaxiques du code Platoniste C_A, H_i aura alors comme signification Platoniste cette proposition Platoniste (H_{eli1},H_{eli2}) suivie de la proposition élémentaire Platoniste: H_{eli3}: « est modélisée par (f_P,$(X_P(i))_F$) ».

Par exemple on admettra l'Axiome suivant: Si E est un ensemble de séquences $(u_i)_H$ à valeurs dans **N**, (H sous-ensemble de **N** fini ou infini), et si F est une fonction E dans un sous-ensemble fini G de **N**, alors si on a une fonction f de H dans **N** et une séquence indexée sur H $(X_i)_H$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisable Ω, telle que f est modélisée par $(X_i)_H$ et que de plus pour tout x de G "$F((X_i)_H)=x$" est un évènement de Ω, alors si on définit la fonction g de de {1} dans G telle que "g(1)=x" est équivalent à « $F((f(i)_H))=x$ » et si on définit la variable aléatoire Y(1) à valeurs dans G telle que p(« Y(1)=x »)=p_Ω(« $F((X_i)_H=x$ »), alors on aura "g est modélisée par Y".

Tout pseudo-Axiome de la TAN de même que les propriétés de correspondance correspondront à des Axiomes de la TAN Platoniste permettant d'obtenir des lois numériques aléatoires. Ceci à l'exception du pseudo-Axiome du modèle exact. En effet, celui-ci affirme que dans le cas où F={1} et qu'on a une fonction f de F dans {0,1} et une variable aléatoire X(1) à valeurs dans {0,1}, avec F est modélisée par $(X(i))_F$ alors si on a $p(X(1)=1)\approx 1$, dans certains cas ceci a comme conséquence F(1)=1. Ceci dans la TAN Platoniste ne sera pas obtenu par un Axiome: Il s'agira de l'interprétation de ce résultat par le mathématicien.

Les Axiomes de la T.A.N Platoniste définiront partiellement la définition de la relation non-floue "est modélisée par".

On remarque qu'il est très certainement possible de n'utiliser aucun Axiome dans la T.A.N Platoniste. Pour celà on définit pour chaque pseudo-Axiome aléatoire et propriété de correspondance des relations non-floues "est modélisée de façon A", "est modélisée de façon B"… pouvant exister entre des fonctions définies sur un sous-ensemble S de **N** et des séquences de variables aléatoires indexées sur le même sous-ensemble S. On les définit par des définitions complètes qui sont déductions logiques relationnelles évidentes des propositions les précédant dans T_A et des hypothèses $H(C_A)$ de la T.A.N Platoniste comprenant on le rappelle la Théorie des probabilités qui elle-même n'utilse pas d'Axiomes autres que ceux des fondements de la T.M.P. Cependant le formalisme de la T.A.N Platoniste obtenue est alors beaucoup plus lourd. Il est cependant remarquable qu'on puisse interpréter la T.A.N par la TMP sans admettre de nouveaux Axiomes.

On pourra donc montrer formellement qu'une proposition stable ou une loi numérique aléatoire ont des pseudo-preuves aléatoires mais pas qu'une proposition stable a une *explication aléatoire*. P étant une proposition mathématique simple générale (C'est à dire n'employant pas de concepts particuliers non-flous pré-définis) , on dira que P a une pseudo-preuve aléatoire si elle concerne une infinité de naturels et de plus si il existe X(1) telle que X(1) est une variable aléatoire, à valeur dans {0,1}, telle que t(P) est modélisée par X(1) et p(X(1)=1)>0,8".

Cependant le fait qu'une proposition P ait une explication aléatoire est une interprétation subjective de la communauté des mathématiciens du fait que la pseudo-preuve aléatoire de P (Si elle existe) constitue une justification théorique possible et intéressante de P. Ceci signifie que ni P ni NonP n'ont été montrés classiquement, que P concerne une infinité de nombres et que P est illustrée par de nombreux tests.

6.RESTRICTION DES MODELISATIONS.

Il pourrait être intéressant ou nécessaire de réduire le nombre des pseudo-Axiomes aléatoires ou de restreindre leurs cas d'application de même que ceux de la propriété de correspondance afin de simplifier la théorie ou de réduire le nombre de pseudo-preuves aléatoires possibles. C'est seulement si certains pseudo-Axiomes sont inutiles ou si on montre qu' on obtient trop de propositions ayant une

pseudo-preuve aléatoire que cette section sera utile. Ainsi, on pourra conserver le pseudo-Axiome aléatoire suivant, dit *pseudo-Axiome aléatoire de l'inclusion des ensembles estimés* :

On considère A et C 2 ensembles estimés (toujours implicitement sur **N**) avec $A\subset C$, et D est défini par D=**N**/C , et donc $A\cap D=\emptyset$. On suppose que A (resp.C) est associé à une loi de probabilité p_A (resp.p_C) d'un espace probabilisable Ω_A (resp.Ω_C) et que C est connu.

Alors d'après ce pseudo-Axiome on pourra considérer que A est un ensemble estimé associé à une loi de probabilité p_{A2} d'un espace probabilisable Ω_{A2} définis par, avec des notations évidentes :
Si i €C : p_{A2}(« i€A »Ω_{A2})=p_A(« i€A »$_{\Omega A}$)/p_C(« i€C)$_{\Omega C}$.

Ceci se justifie intuitivement par :
p_{A2}(« i€A »$_{\Omega A2,\Omega A}$/« i€C »$_{\Omega 2,\Omega C}$)= p_{A2}(« i€A »$_{\Omega A2,\Omega A}\cap$« i€C »$_{\Omega A2,\Omega C}$)/$p_{A2}$(« i€C »$_{\Omega A2,\Omega C}$)=
p_{A2}(« i€A »$_{\Omega A2,\Omega A}$)/p_{A2}(« i€C »$_{\Omega A2,\Omega C}$) (Car $A\subset C$).
On a employé et on utilisera les notations :
-Ω_E étant un espace probabilisable, « i€A »$_{\Omega E}$ représente un évènement de Ω_E modélisant la proposition « i€A ».
-A étant un ensemble estimé associé à une loi de probabilité p_A d'un espace probabilisable Ω_A et Ω_E un espace probabilisable de loi de probabilité p_E, « i€A »$_{\Omega E,\Omega A}$ représentera un évènement de Ω_E modélisant la proposition « i€A » et tel que (On rappelle qu'une même proposition peut être modélisée par des évèvements d'espaces probabilisables distincts):
p_E(« i€A »$_{\Omega E,\Omega A}$)=p_A(« i€A »$_{\Omega A}$).

Si i€D : p_{A2}(« i€A »$_{\Omega A2}$)=0 (Car $A\cap D=\emptyset$).

Dans certains cas, si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes en obtenant « f est modélisée par Xf », Xf séquence de variables indépendantes, on ne pourra appliquer la propriété de correspondances qu'à certains types de proposition ou de fonctions utilisant f. On dira alors « f est modélisée par Xf *avec restriction* ». On dira qu'on a *une restriction de la propriété de correspondance pour* (f,Xf). Cependant on verra que restreindre la propriété de correspondance alourdit le formalisme de la théorie des ensembles estimés et c'est seulement si il apparaît que cette restriction est nécessaire qu'on l'incluera dans la théorie des ensembles estimés. Nous allons maintenant donner une illustration de cas de restriction de la propriété de correspondance.

On suppose que F est un sous-ensemble fini ou infini de **N** et que pour tout i élément de F on a une variable aléatoire $X_{\Omega i}(i)$ définie sur un espace probabilisable Ω_i de loi de probabilité $p_{\Omega i}$ et à valeur dans {0,1} définie en utilisant des évènements élementaires indépendants « k_{i1}€A_1 »$_{\Omega i,\Omega A1}$,…, « k_{ip}€A_p »$_{\Omega i,\Omega Ap}$, A_1,..,A_p étant des ensembles estimés distincts, et pour j dans {1,..,p} A_j associé à un espace probabilisable Ω_{Aj} de loi de probabilité p_{Aj}. Les k_{ij} sont des fonctions de i ou (et) de(et) de k dans le cas où F=F(k) est défini en fonction du naturel k.

C'est-à-dire qu'on aura « $X_{\Omega i}(i)$=1 »$_{\Omega i}$ est équivalent à un évènement de Ω_i défini en utilsant tous les évènements de type « k_{ij}€A_j »$_{\Omega i,\Omega Aj}$ et les symboles « Non », « et » et « ou ». On suppose de plus que l'évènement « $X_{\Omega i}(i)$=1 » modélise une proposition « $f_E(i)$=1 », $f_E(i)$ à valeur dans {0,1}, « $f_E(i)$=1 » équivalente à une proposition utilisant les propositions élémenaires de type « k_{ij}€A_j » et les symboles « et », « ou » et « Non ». (En général on aura « $f_E(i)$=1 » est équivalent à « i€E », E ensemble estimé ou E=E(F)$\subset$F).
(Ce qui suit demeure vrai si plusieurs évènements élementaires sont du type « k_{ijh}€A_j »$_{\Omega i,\Omega Aj}$ pour différents naturels h ou si des variables aléatoires distinctes ne sont pas définies en utilisant les mêmes ensembles estimés A_j).

Avec les hypothèses précédentes on dira que $f_E(i)$ est une fonction définie sur F *modélisée sur les ensembles estimés* A_1,..,A_p par $X_{\Omega i}(i)$.

D'après le pseudo-Axiome aléatoire des variables indépendantes il existera un espace probabilisable Ω_F correspondant à une loi de probabilité $p_{\Omega F}$ et des variables aléatoires indépendantes $X_{\Omega F}(i)$, i élément de {1,..,p} définies sur Ω_F et à valeur dans {0,1} telles que pour tout i élément de F:
$p_{\Omega F}$(« $X_{\Omega F}(i)$=1 »)=$p_{\Omega i}$(« $X_{\Omega i}(i)$=1 »), avec « $f_E(i)$ est modélisée par $X_{\Omega F}(i)$ ».

Cependant, si il existe h dans $\{1,.,p\}$, et (i,j) dans F^2 avec $i\neq j$ tel que $k_{ih}=k_{jh}$, on aura alors « $f_E(i)$ est modélisées par $X_{\Omega F}(i)$ avec restriction ». On dira que « $f_E(i)$ est modélisées par $X_{\Omega F}(i)$ *par sommation* ». On aura donc une restriction de la propriété de correspondance pour $(f_E, X_{\Omega F})$. On pourra remplacer la notation $X_{\Omega F}$ par la notation $X_{\Omega F,E}$.

Dans le cas contraire, on aura « $f_E(i)$ est modélisée par $X_{\Omega F}(i)$ sans restriction ». Ceci signifiera qu'on pourra appliquer la propriété de correspondance à toute fonction ou proposition utilisant seulement f_E comme fonction modélisée.

Dans le cas où « $f_E(i)$ est modélisées par $X_{\Omega F}(i)$ par sommation », on ne pourra appliquer la propriété de correspondance que pour obtenir des propositions de type P1 et P2 que nous allons définir.

On conserve les notations précédentes. Si F est infini, on notera F(n) l'ensemble des éléments de **N** appartenant à F et inférieur ou égal à n.

On ne pourra alors appliquer la restriction de la propriété de correspondance pour $(f_E, X_{\Omega F}$) que pour obtenir que la proposition P1 : « La limite quand n tend vers l'infini de $(\Sigma_{i\in F(n)}f_E(i))/g(n)$ est égale à a », (a étant un réel et g une fonction croissante et tendant vers l'infini) est modélisée par l'évènement Ev1 : « La limite quand n tend vers l'infini de $(\Sigma_{i\in F(n)} X_{\Omega F}(i))/g(n)$ est égale à a ».

Pour obtenir la modélisation précédente on applique la restriction de la propriété de correspondance pour $(f_E, X_{\Omega F}$).

On suppose qu'on a des ensembles estimés $A_1,..,A_p$, et que $(k(j))_{\mathbf{N}}$ est une séquence de naturels croissante strictement. On suppose de plus que pour tout k(j), F(k(j)) est un ensemble de cardinal fini n(k(j)), n(k(j)) croissant et tendant vers l'infini, et $f_{F(k(j)E(k(j)}$ est une fonction de F((k(j)) dans $\{0,1\}$ avec $f_{F(k(j)E(k(j)}(i)$ est modélisée sur les ensembles estimés $A_1,..,A_p$ par $X_{\Omega F(k(j))i}(i)$ et $f_{F(k(j)E(k(j)}$ est modélisée par $X_{\Omega F(k(j))}$ par sommation. »

Alors on ne pourra appliquer la restriction de la propriété de correspondance aux couples $(f_{F(k(j)E(k(j)}, X_{\Omega F(k(j))})$ que pour obtenir qu'une proposition de type P2 : « La limite quand k(j) tend vers l'infini de $G(k(j))/g(k(j))= (\Sigma_{i\in F(k(j)} f_{F(k(j))E(k(j))}(i))/g(k(j))$ est égale à a» est modélisée par l'évènement Ev2 : « La limite quand k(j) tend vers l'infini de Y(k(j))/g(k(j)) est égale à a », g étant une fonction définie sur **N** , croissante et tendant vers l'infini pour k(j) tendant vers l'infini et les Y(k(j)) étant des variables aléatoires indépendantes telles que Y(k(j)) coincide avec $Y_{F(k(j))\Omega F(k(j))}(k(j))=\Sigma_{i\in F(k(j))} X_{\Omega F(k(j))}(i)$.

Pour obtenir la modélisation précédente, on applique la restriction de la propriété de correspondance pour $(f_{F(k(j)E(k(j)}, X_{\Omega F(k(j))})$ à $G(k(j))= \Sigma_{i\in F(k(j)} f_{F(k(j))E(k(j))}(i)$, puis le pseudo-Axiome des variables indépendantes à « G(k(j)) est modélisée par $Y_{F(k(j))\Omega F(k(j))}(k(j))$ », ce qui permet d'obtenir « G(k(j)) est modélisée par Y(k(j)) » puis la propriété de correspondance à P2. On peut considérer qu'il y a une restriction de la propriété de correspondance pour (G,Y).

En conservant les mêmes notations mais en supposant que $f_E(i)$ est modélisée par $X_{\Omega F}(i)$ sans restriction », la modélisation de P1 s'obtient directement par application de la propriété de correspondance, valide sans restriction. Si on suppose que $f_{F(k(j)E(k(j)}$ est modélisée par $X_{\Omega F(k(j))}$ sans restriction, on admettra aussi la validité de la modélisation de P2 par Ev2.(Obtenue de la même façon).

Il est évident que la modélisation sera de meilleure qualité si pour F donné, pour tous i et j éléments distincts de F, il existe h dans $\{1,.,p\}$ tel que $k_{ih}\neq k_{jh}$ et de même, dans les hypothèses de la modélisation de P2, si pour tous k(r) et k(s) distincts, pour tous i dans F(k(r)) et j dans F(k(s)), il existe h dans $\{1,..,p\}$ tel que, avec des notations évidentes, $k_{ih}(k(r))\neq k_{jh}(k(s))$. On pourra donc toujours essayer de se ramener au cas précédent comme on l'a fait dans les explications aléatoires des Conjectures fortes de Goldbach et des nombres premiers jumeaux.

On obtient des résultats analogues aux précédents si on remplace les évènements élémentaires « $k_{ij}\in A_j$ »$_{\Omega i,\Omega Aj}$ par des variables aléatoires $X_{\Omega i,\Omega Aj}(k_{ij})$, définies sur l'espace probabilisable Ω_i et à valeurs dans $\{0,1\}$ et telles que $p_{\Omega i}$(« $X_{\Omega i,\Omega Aj}(k_{ij})=1$ »)$=p_{\Omega i}$(« $k_{ijh}\in A_j$ »$_{\Omega i,\Omega Aj}$). On suppose alors que pour tout i dans F, on a une fonction F_i telle que $f_E(i)=F_i(f_{A1}(k_{i1}),..,f_{Ap}(k_{ip}))$, modélisée d'après la propriété de correspondance par $X_{\Omega i}(i)=F_i(X_{\Omega i,\Omega A1}(k_{i1}),..,X_{\Omega i,\Omega Ap}(k_{ip}))$. F_i sera choisie pour obtenir $f_{E(i)}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ et pourra être donc par exemple un produit ou une expression du type : $f_{A1UA2}(i)=f_{A1}(i)+f_{A2}(i)-f_{A1}(i)f_{A2}(i)$.

L'obtention de la proposition donnant une estimation de A∩B, A et B étant des ensembles estimés est en accord avec la restriction de la propriété de correspondance qu'on a définie. (On obtient que $f_{A\cap B}$ est modélisée par $X_{\Omega\mathbf{N},A\cap B}$ sans restriction.) De même les explications aléatoires de la Conjecture Forte de Goldbach et celle des nombres premiers jumeaux. Il semble plus généralement que si on réduit les cas d'application de la propriété de correspondance et du pseudo-Axiome des variables indépendantes concernant les ensembles estimés aux cas précédents et si on se réduit à admettre le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés, le pseudo-Axiome aléatoire de la limite ainsi que le pseudo-Axiome des ensembles estimés, cela soit suffisant pour l'étude des ensembles estimés par la T.A.N.(On rappelle que le pseudo-Axiome des ensembles estimés permet de modéliser comme un ensemble estimé (sur **N**) un sous-ensemble infini A de **N** dont on connait une fonction équivalente à a(n), a(n) étant le nombre d'éléments de A inférieur à n). On rappelle que les restrictions précédentes de la propriété de correspondance et du pseudo-Axiome des variables indépendantes alourdissent le formalisme de la théorie des ensembles estimés, et que c'est seulement s'il apparait que ces restrictions sont nécessaires qu'on les intègrera à la théorie des ensembles estimés.

On aurait pu obtenir une explication aléatoire de la Conjecture forte de Goldbach sans utiliser les ensembles estimés mais en utilisant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable, généralisant l'explication aléatoire de la Conjecture faible de Goldbach et l'estimation de r(k) exposées dans le premier article. Pour cela on utilisera néanmoins les ensembles qu'on a introduits.

On rappelle que la restriction de la propriété de correspondance et les pseudo-Axiomes aléatoires précédents peuvent être identifiées dans une théorie mathématique Platoniste, branche de la Théorie Mathématique Platoniste (T.M.P), à des propositions mathématiques simples définissant des relations non-floues de type « est modélisé de façon A, « est modélisé de façon B »… Et donc l'interprétation de la T.A.N par la T.M.P ne nécessite pas l'introduire de nouveaux Axiomes.

7.CONCLUSION

Ainsi on a montré comment la TAN permettait de montrer que des propositions concernant les décimales d'irrationnels ou des sous-ensembles de **N** avaient des explications aléa/toires, c'est-à-dire des explications rationnelles basées sur le hasard, sans avoir été démontrées classiquement ni leur négation.
Il semble certain que bien que souvent ces explications aléatoires soient très simples, ces propositions n'aient pas de démonstration classique. Par exemple si on considère la proposition « Si I est l'ensemble des naturels i inférieurs à n tels que la $i^{ème}$ décimale de Log(3),√5,π coïncide, alors I est infini », il semble impossible de prouver cette proposition en utilisant les Axiomes classiques de la Théorie des nombres, alors que cette proposition peut être obtenue très simplement par la TAN, qui permet d'obtenir aussi l'estimation i(n) de I.

Comme dans l'étude de la Conjecture faible de Goldbach [(5)], on a vu que la TAN permettait non seulement de prévoir que certains ensembles étaient finis, infinis ,vides ou non vides, mais aussi de prévoir certaines de leurs caractéristiques, par exemple leur estimation. Il semble impossible d'obtenir ces caractéristiques si particulières sans utiliser les modèles statistiques obtenus par la TAN.

Il reste à réaliser des tests, afin de vérifier l'importance et la validité de la TAN concernant les décimales d'irrationnels et les ensembles estimés. En particulier, il faudrait vérifier en effectuant des tests la validité de la variante de la Conjecture forte de Goldbach de Hardy et Littlewood, et celle concernant les nombres premiers jumeaux dont on a donné une pseudo-preuve aléatoire dans cet article. Si tel n'était pas le cas, il faudrait trouver des modèles plus précis que ceux présentés dans cet article.

Il reste aussi à démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée qu'on a conjecturée, mais ceci est un problème classique de probabilité. On a vu cependant qu'on pouvait éviter son utilisation en appliquant le pseudo-Axiome aléatoire de la limite. Il faudrait aussi comme on l'a vu étudier les prédictions des modèles $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, et $M_{eq}I(k)\pi(p_1,..,p_n)$ pour les faibles valeurs de k (k dans [1000,100000]) et vérifier si elles permettent de justifier l'aspect de la Comète de Goldbach pour ces faibles valeurs.

Un résultat extrêmement intéressant obtenu dans cet article est d'avoir donné une explication aléatoire à des propositions comme la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood concernant la Conjecture forte de Goldbach et la Conjecture forte des nombres premiers jumeaux.

Références :

1.E.J Borowski, J.M Borwein,Mathematics,*Collins Dictionnary* (GB 1984)
2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers,* Belin (Paris 2000)
3.M.R Spiegel,J.S Schiller,R.Srinivasan,*Probability and statistics*,McGraw Hill (2000)
4.P.Roger,*Probabilités statistiques et processus stochastiques*,Pearson(France 2004)
5.T.Delort, *Théorie Aléatoire des Nombres-Partie I :Conjecture faible de Goldbach.* , Extrait du livre Théories d'or 8e édition, Editions Books on Demand, Paris (2015)
6.O.Rioul, *Théorie des probabilités*, Lavoisier (2008),Paris.
7.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta mathematica,(1923).